

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Fakultät für Physik und Geowissenschaften

Diplomarbeit

im Studiengang Meteorologie
zum Thema

Die kompressiblen Euler-Gleichungen für die feuchte Atmosphäre

MICHAEL JÄHN

30. März 2011

Eingereicht bei: PROF. DR. EBERHARD RENNER

Zweitgutachter: DR. OLAF HELLMUTH

Betreuer: DR. OSWALD KNOTH

Zusammenfassung

1 Seite

Abstract

Übersetzung

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Thermodynamik feuchter Luft	3
2.1	Feuchtevariablen	3
2.2	Abgeleitete Temperaturen	5
2.2.1	Potentielle Temperatur	5
2.2.2	Verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur	8
2.2.3	Äquivalentpotentielle Temperatur	9
2.3	Innere Energie und Enthalpie	10
3	Numerik	13
3.1	Das Modell ASAM	13
3.2	Zeitdiskretisierungsverfahren	14
4	Modellformulierungen	17
4.1	Die kompressiblen Euler-Gleichungen	17
4.2	Berechnung der Quellterme	20
4.2.1	Phasenumwandlungsterm	20
4.2.2	Wasserdampfproduktionsterm	21
4.2.3	Niederschlagsterm	21
4.2.4	Quellterme thermodynamischer Variablen	23
4.2.4.1	Verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur	23
4.2.4.2	Äquivalentpotentielle Temperatur	25
4.2.4.3	Gesamtenergie	26
4.2.4.4	Luftdruck	27
5	Numerische Tests	31
5.1	“Dry Bubble”	31
5.2	“Moist Bubble”	31
5.3	“Moist Bubble” mit fallendem Niederschlag	31
6	Diskussion und Ausblick	33

A	Liste der Symbole	35
B	Tendenzgleichungen der thermodynamischen Variablen	37
B.1	Innere Energie, absolute und potentielle Temperatur	37
B.2	Verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur	40
B.3	Äquivalentpotentielle Temperatur	41
B.4	Energie	43
B.5	Luftdruck	44
	Literaturverzeichnis	47

Abbildungsverzeichnis

4.1	Fallgeschwindigkeiten von Regentropfen in Abhängigkeit von der Dichte des Flüssigwassers	22
-----	--	----

Tabellenverzeichnis

2.1	Gaskonstante und spezifische Wärmen für das Gemisch feuchte Luft	7
-----	--	---

1 Einleitung

Computergestützte, numerische Lösungsverfahren sind aus der heutigen modernen Wettervorhersage nicht mehr wegzudenken. Die Weiterentwicklung von Wettermodellen spielt dadurch eine wichtige Rolle in der Forschung und obliegt einem interdisziplinären Austausch zwischen der Physik, Meteorologie, Mathematik und Informatik.

Zur Verbesserung der Qualität von Wettermodellen existieren unterschiedliche Ansätze und Möglichkeiten. Beispielsweise kann die Beschreibung von kleinräumigen Prozessen, die innerhalb einer Modell-Gitterzelle liegen und somit nicht direkt durch das Modell aufgelöst werden können, verbessert werden. Darunter fallen wolkenphysikalische Vorgänge (Tropfenbildung, Umwandlungsprozesse etc.) sowie Turbulenz, Konvektion und auch Strahlung. Auch Wärme- und Feuchteströme am Boden gehören zu diesen *Parametrisierungen*, welche aufgrund ihrer Komplexität einiges an Rechenzeit beanspruchen.

Neben der Neu- und Weiterentwicklung von numerischen Zeitintegrationsverfahren ist es auch möglich, das Grundgleichungssystem des Modells zu variieren, indem man z.B. andere prognostische Variablen in die Modellbeschreibung einführt.

Für den operationellen Betrieb von Wettermodellen sind außerdem die Verwendung von immer leistungsstärkeren Computern, präzisere Aufarbeitung von Daten (*Datenassimilation*) sowie eine höhere Verfügbarkeit von Wetterdaten von Bedeutung.

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, unterschiedliche prognostische Variablen in ein Strömungsmodell einzubauen. In der Literatur existiert eine Vielzahl idealisierter Testbeispiele zum Testen neuer Modellimplementierungen. Ein solches Testbeispiel, das sich besonders für die Validierung der thermodynamischen Gleichungen und der Wolkenmikrophysik eignet, wurde von Bryan u. Fritsch [2002] beschrieben. Darüberhinaus sollen sowohl Wasserdampf Flüsse als auch fallender Niederschlag der Modellumgebung hinzugefügt werden.

Das Gleichungssystem, welches für die numerische Modellierung diskretisiert wird, leitet sich aus den fundamentalen Erhaltungssätzen der Strömungsmechanik und Thermodynamik ab. Insofern handelt es sich letztendlich um ein nicht-approximiertes Gleichungssystem, wenngleich zu betonen ist, dass an manchen

Stellen vereinfachende Annahmen gemacht werden. Dies erscheint z.B. dann sinnvoll, wenn die Komplexität zu sehr ansteigt und dadurch keine effiziente Modellierung mehr möglich ist oder wenn spezielle Einflüsse so gering sind, dass sie für das Gesamtergebnis keine Rolle spielen. So untersucht beispielsweise Bannon [2002] Größenordnungen in einer allgemeinen Formulierung von Gleichungen, die die Dynamik und Thermodynamik von Wolkenluft beschreiben.

Ein wichtiges Argument bei der Suche nach einer geeigneten thermodynamischen Variable, welche prognostisch in einem Modell berechnet werden soll, ist ihre Erhaltungseigenschaft. Nach Thuburn [2008] gibt es eine Reihe von Gründen, warum diese Eigenschaft von großer Bedeutung ist, da z.B. mit der Energieerhaltung das Auftreten von nichtlinearen Instabilitäten vermieden werden kann.

Im folgenden Kapitel werden wichtige thermodynamische Größen und Zusammenhänge zur Beschreibung der feuchten Atmosphäre erläutert. Dabei werden bereits abgeleitete Temperaturgrößen, welche später auch als prognostische Variablen vorkommen, hergeleitet. Kapitel 3, „Numerik“, gibt einen Überblick über das numerische Modell und den mathematischen Hintergrund des Zeitintegrationsverfahrens. Die dem Modell zugrunde liegenden kompressiblen Euler-Gleichungen mit den jeweils unterschiedlichen thermodynamischen Variablen (verallgemeinerte virtuelle Temperatur, Entropie, Gesamtenergie und Luftdruck) werden im 4. Kapitel, „Modellformulierungen“, vorgestellt und ausführlich erklärt. All diese Vorüberlegungen bilden die Grundlage für die Durchführung der Testbeispiele im 5. Kapitel. Abschließend sollen in Kapitel 6, „Diskussion und Ausblick“, die Ergebnisse bewertet und interpretiert werden. Ebenso werden Ideen für zukünftige Weiterentwicklungen angesprochen.

2 Thermodynamik feuchter Luft

Wasserdampf spielt in der Atmosphäre eine bedeutende Rolle. Obwohl sein Anteil in der Luft mit 0 bis 4 % gering ist, ist er für die Bildung von Wolkentropfen und Niederschlag verantwortlich. Da der Wasser in der Atmosphäre in allen drei Phasen vorkommt, werden bei Phasenübergängen große Mengen an latenter Wärme freigesetzt oder aufgebraucht. Darüber hinaus hat die Präsenz von Wasser in der Atmosphäre Auswirkungen auf die Dynamik und den Strahlungshaushalt.

In den folgenden Unterabschnitten wird eine Einführung in die Thermodynamik feuchter Luft (*moist air thermodynamics*) gegeben. Wichtige Kenngrößen zur Beschreibung des Wasserdampfes werden in Abschnitt 2.1 eingeführt. Abgeleitete Temperaturen, welche für die Beschreibung der Änderungen der Luftdichte aufgrund des Wasserdampfes und/oder Wolkenwassers geeignet sind, werden in 2.2 vorgestellt.

2.1 Feuchtevariablen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Feuchtegehalt von Luft zu beschreiben. Die am häufigsten verwendeten Größen (mit den gebräuchlichen Einheiten) sind

- die Dichte des Wasserdampfes ρ_v [kg m^{-3}]
- das Mischungsverhältnis $r_v = \frac{\rho_v}{\rho_d}$ [g kg^{-1}]
- die spezifische Feuchte $q_v = \frac{\rho_v}{\rho}$ [g kg^{-1}]
- der Dampfdruck p_v [hPa]

Dabei sind ρ_d die Dichte der trockenen Luft und ρ die Gesamtluftdichte (inklusive Wasserdampf). Die Indizes richten sich nach den englischsprachigen Bezeichnungen: d für trockene Luft (*dry air*) und v für Dampf (*vapor*). Die Feuchtemaße lassen sich auch als Funktionen der anderen Größen ausdrücken. So erhält man

beispielsweise folgende Zusammenhänge:

$$q_v = \frac{\varrho_v}{\varrho_v + \varrho_d} = \frac{r_v}{r_v + 1}, \quad (2.1)$$

$$r_v = \frac{\frac{p_v}{R_v T}}{\frac{p_d}{R_d T}} = \frac{R_d p_v}{R_v p_d} = \varepsilon \frac{p_v}{p - p_v}. \quad (2.2)$$

Dabei wurden für die Partialdichten trockener und feuchter Luft die Zustandsgleichung idealer Gase benutzt:

$$p = \varrho RT \quad \text{bzw.} \quad \varrho = \frac{p}{RT}. \quad (2.3)$$

T ist hierbei die absolute Temperatur [K] und R die individuelle Gaskonstante [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$], welche als Quotient der universellen Gaskonstante [$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$] und der molaren Masse [kg mol^{-1}] des jeweiligen Gases definiert ist:

$$R \equiv \frac{R^*}{M}. \quad (2.4)$$

Des Weiteren ist ε der Quotient der individuellen Gaskonstanten trockener und wasserdampfhaltiger Luft, oder, wie man aus Gl. (2.4) erkennen kann, der Quotient der jeweiligen molaren Massen:

$$\varepsilon \equiv \frac{R_d}{R_v} = \frac{M_v}{M_d} \approx 0,622. \quad (2.5)$$

In Gl. (2.2) wurde außerdem Gebrauch vom Dalton'schen Gesetz gemacht:

$$p = \sum_i p_i. \quad (2.6)$$

Der Gesamtdruck setzt sich bei einem idealen Gas aus der Summe der Partialdrücke zusammen. Sowohl trockene Luft als auch Wasserdampf können in guter Näherung als ideale Gase angesehen werden. Also folgt für den Druck

$$p = p_d + p_v = \varrho_d R_d T + \varrho_v \frac{R_d}{\varepsilon} T = p_d \left(1 + \frac{r_v}{\varepsilon}\right). \quad (2.7)$$

Eine weitere, oft verwendete Größe zur Beschreibung des Wasserdampfgehalts ist die relative Feuchte \mathcal{H} . Sie gibt das Verhältnis von dem aktuellen und dem Sättigungsdampfdruck an:

$$\mathcal{H} \equiv \frac{p_v}{e_s}. \quad (2.8)$$

Der Sättigungsdampfdruck e_s ist dabei allein eine Funktion der Temperatur.

Führt man nun Wasser in seiner Reinform (*liquid*) in die Betrachtungen ein, so ist es notwendig, noch eine weitere Größen zu definieren, um den Flüssigwassergehalt zu beschreiben:

- das Flüssigwasser-Mischungsverhältnis $r_l = \frac{\varrho_l}{\varrho_d}$ [g kg⁻¹].
- der spezifische Flüssigwasser-Gehalt $q_l = \frac{\varrho_l}{\varrho}$ [g kg⁻¹].

ϱ_l ist analog die Dichte des Flüssigwassers. Damit lässt sich der Gesamtwassergehalt definieren:

$$r_t \equiv r_v + r_l. \quad (2.9)$$

2.2 Abgeleitete Temperaturen

2.2.1 Potentielle Temperatur

Die potentielle Temperatur, die sich aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik ableitet, lautet im trockenen Fall

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa. \quad (2.10)$$

T ist dabei die absolute Temperatur, p_0 ein Referenzdruck (üblicherweise wählt man $p_0 = 1000$ hPa), $\kappa = R_d/c_{pd}$ die POISSON-Konstante und $c_{pd} = 1004$ J (kg K)⁻¹ die spezifische Wärmekapazität für trockene Luft bei konstantem Druck.¹ Die potentielle Temperatur ist nun diejenige Temperatur, die ein Luftpaket annimmt, wenn es unter adiabatischen Prozessen auf den Referenzdruck gebracht wird (Etling [2008]).

Gleichung (2.10) ist gültig für eine absolut trockene Atmosphäre. Beim Vorhandensein von Wasserdampf ändert sich der Ausdruck im Exponenten. Es ist somit vonnöten, für die Gaskonstante und die Wärmekapazität eine Formulierung zu finden, die die Wasserdampfabhängigkeit berücksichtigt. Wir betrachten daher die Zustandsgleichung und führen das spezifische Volumen $\alpha = \frac{1}{\varrho}$ ein:

$$p\alpha = RT \quad \text{mit} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{V}{m_d + m_v} = \frac{\alpha_d}{1 + r_v} = \frac{R_d T}{p_d} \frac{1}{1 + r_v} \\ &= \frac{R_d T}{p} \frac{1 + r_v/\varepsilon}{1 + r_v} \equiv \hat{R}_m \frac{T}{p} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dabei sind V das Volumen, m_d und m_v die Massen der trockenen und wasserdampfhaltigen Luft und α_d das spezifische Volumen trockener Luft. Zum Ersetzen des trockenen mit dem Gesamtdruck wurde Gl. (2.7) benutzt. \hat{R}_m ist nun

¹Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die spezifischen Wärmekapazitäten eine leichte Druck- und Temperaturabhängigkeit besitzen. Da diese aber innerhalb der Troposphäre nur um maximal 3% des angegebenen Wertes variieren, können sie für unsere Betrachtungen als konstant angenommen werden. Vgl. dazu [Emanuel, 1994, S. 109 und Appendix 2].

die Gaskonstante des feuchten (*moist*) Luftgemisches. Häufig wird sie auch als effektive Gaskonstante bezeichnet.

Ähnlich verfährt man bei der spezifischen Wärmekapazität: Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik lautet

$$\delta Q = dU - \alpha dp. \quad (2.13)$$

δQ ist die zugeführte Wärmeenergie und dU die innere Energie. Da δQ eine wegabhängige Prozessgröße ist, stellt sie kein vollständiges Differenzial dar und ist deshalb mit dem griechischen Buchstaben delta gekennzeichnet. Bei konstantem Druck lässt sich Gl. (2.13) schreiben als:

$$(m_v + m_d)\delta Q = (m_d c_{pd} + m_v c_{pv})dT. \quad (2.14)$$

c_{pv} ist die spezifische Wärmekapazität von Wasserdampf bei konstantem Druck und hat einen Wert von $c_{pv} = 1870 \text{ J (kg K)}^{-1}$. Division durch m_d und Beachtung der Definition der Mischungsverhältnisse liefert:

$$(1 + r_v)\delta Q = (c_{pd} + r_v c_{pv})dT \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow \delta Q = \frac{(c_{pd} + r_v c_{pv})}{(1 + r_v)}dT. \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = \frac{c_{pd} + r_v c_{pv}}{1 + r_v} = q_d c_{pd} + q_v c_{pv} \equiv \hat{c}_{pm}. \quad (2.17)$$

Auf die gleiche Art und Weise findet man auch einen Ausdruck für die spezifische Wärmekapazität feuchter Luft bei konstantem Volumen:

$$\hat{c}_{vm} \equiv \frac{c_{vd} + r_v c_{vv}}{1 + r_v} = q_d c_{vd} + q_v c_{vv} \quad (2.18)$$

mit $c_{vv} = 1410 \text{ J (kg K)}^{-1}$ als spezifische Wärmekapazität von Wasserdampf bei konstantem Volumen. Zusammenfassend seien in Tabelle 2.1 charakteristische Werte für die Gaskonstante sowie die spezifischen Wärmekapazitäten für das Gemisch feuchte Luft gegeben.

Aus praktischen Gründen wird später in den Formulierungen mit trocken-spezifischen Größen gearbeitet, so dass wir die Wärmekapazitäten und Gaskonstante folgendermaßen definieren:

$$c_{pm} = \frac{\varrho}{\varrho_d} \hat{c}_{pm} = c_{pd} + r_v c_{pv} \quad (2.19)$$

$$c_{vm} = \frac{\varrho}{\varrho_d} \hat{c}_{vm} = c_{vd} + r_v c_{vv} \quad (2.20)$$

$$R_m = \frac{\varrho}{\varrho_d} \hat{R}_m = R_d + r_v R_v \quad (2.21)$$

Bezeichnung	Formelzeichen/Ausdruck	Wert für $r_v = 0,04$
Gaskonstante	$\hat{R}_m = R_d \frac{1+r_v/\varepsilon}{1+r_v}$	$293,69 \text{ J (kg K)}^{-1}$
spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck	$\hat{c}_{pm} = \frac{c_{pd}+r_v c_{pv}}{1+r_v}$	$992,96 \text{ J (kg K)}^{-1}$
spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen	$\hat{c}_{vm} = \frac{c_{vd}+r_v c_{vv}}{1+r_v}$	$1867,27 \text{ J (kg K)}^{-1}$

Tabelle 2.1: Gaskonstante und spezifische Wärmen für das Gemisch feuchte Luft

Wir erhalten nun folgenden Ausdruck für die feuchte potentielle Temperatur:

$$\tilde{\theta} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_m}{c_{pm}}} . \quad (2.22)$$

Um die Wasserdampfabhängigkeit der potentiellen Temperatur zu untersuchen, schreiben wir den Exponenten aus:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d(1+r_v/\varepsilon)}{c_{pd}+r_v c_{pv}}} \\ &= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d r_v}{c_{pd}} \frac{1+r_v/\varepsilon}{1+\frac{c_{pv}}{c_{pd}}}} \\ &\approx T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}(1-0,24r_v)} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Da r_v unter atmosphärischen Bedingungen kaum einen Wert über 0,04 erreicht, ändert sich der Exponent im Vergleich zum trockenen Fall um weniger als 1%. Für einfache Rechnungen kann man somit für die potentielle Temperatur Gl. (2.10) benutzen.

Sind sowohl Wasserdampf als auch Flüssigwasser vorhanden, so muss dies bei der spezifischen Wärmekapazität beachtet werden. Die Gaskonstante hingegen bleibt invariant.

$$\hat{c}_{pml} = \frac{c_{pd} + r_v c_{pv} + r_l c_{pl}}{1 + r_v + r_l} = q_d c_{pd} + q_v c_{vv} + q_l c_{pl} , \quad (2.24)$$

wobei $c_{pl} = 4186 \text{ J (kg K)}^{-1}$ die spezifische Wärmekapazität von Flüssigwasser bei konstantem Druck ist. Die feuchte potentielle Temperatur lautet dann in ihrer

allgemeinen, für Wolkenluft gültigen Form

$$\tilde{\theta} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa_m} \quad (2.25)$$

mit $\kappa_m = R_m/c_{pml}$. Sie wird, um sie von der trockenen potentiellen Temperatur zu unterscheiden, mit einer Tilde gekennzeichnet.

2.2.2 Verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur

Die in Abschnitt 2.1 eingeführte Zustandsgleichung für ideale Gase soll nun auch für feuchte Luft aufgestellt werden. Da die molare Masse von Wasserdampf geringer ist als diejenige von trockener Luft, ist wasserdampfhaltige Luft leichter als trockene Luft. Sie hat demnach auch eine geringere Dichte. Diese Wasserdampfabhängigkeit der Dichte wird in der Meteorologie in einer wasserdampfabhängigen Temperatur ausgedrückt, der sogenannten virtuellen Temperatur. Sie ist demnach diejenige Temperatur, welche trockene Luft haben müsste, damit sie die gleiche Dichte und den gleichen Druck hätte wie die feuchte Luft (vgl. Etling [2008]). Mithilfe dieser Temperatur kann das Gemisch feuchte Luft mit der Zustandsgleichung für trockene Luft behandelt werden. Setzt man also Gl. (2.12) in die Zustandsgleichung für ideale Gase (2.3) ein, so erhält man

$$p = \rho R_d T_v \quad (2.26)$$

mit

$$T_v \equiv T \frac{1 + r_v/\varepsilon}{1 + r_v}. \quad (2.27)$$

Wiederum soll auch der Flüssigwassergehalt r_l in die Betrachtungen einbezogen werden. Benutzt man das spezifische Volumen für das System trockene Luft/Wasserdampf/Wolkenwasser („Wolkenluft“) und die Zustandsgleichung, so findet man

$$T_\rho \equiv T \frac{1 + r_v/\varepsilon}{1 + r_v + r_l}. \quad (2.28)$$

Diese Temperatur wird bei Emanuel [1994] als Dichte-Temperatur bezeichnet (*density temperature*). In Anlehnung an Schnaidt [1944] soll sie im Folgenden als verallgemeinerte virtuelle Temperatur bezeichnet werden. Analog gilt auch die Definition von T_v , mit dem Unterschied, dass es sich jetzt nicht nur um feuchte Luft, sondern um Wolkenluft handelt. Man beachte, dass T_ρ sich bei Abstinenz von kondensiertem Wasser zu T_v reduziert. Ersetzt man nun in Gl. (2.25) die absolute mit der verallgemeinerten virtuellen Temperatur, so erhält man die Dichtepotentielle (*density potential temperature*) oder auch verallgemeinerte virtuelle

potentielle Temperatur:

$$\theta_e \equiv \tilde{\theta} \frac{1 + r_v/\varepsilon}{1 + r_v + r_l}. \quad (2.29)$$

2.2.3 Äquivalentpotentielle Temperatur

Wenn in der Meteorologie von der äquivalentpotentiellen Temperatur die Rede ist, so steht dies in engem Zusammenhang mit dem Begriff der Entropie. Die Entropie S ist eine Zustandsgröße und folgendermaßen definiert (2. Hauptsatz der Thermodynamik):

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Big|_{rev} \quad (2.30)$$

Gl. (2.30) sagt aus, dass die Entropie unter reversiblen, adiabatischen Prozessen² ($\delta Q = 0$) erhalten bleibt. Definiert man die spezifische Entropie als Quotient aus Entropie und der Einheitsmasse trockener Luft, so folgt:

$$s \equiv \frac{S}{\varrho_d} = \frac{\varrho_d s_d + \varrho_v s_v + \varrho_l s_l}{\varrho_d} = s_d + r_v s_v + r_l s_l \quad (2.31)$$

Nimmt man nun Phasengleichgewicht zu jedem Zeitpunkt an und benutzt die Clausius-Clapeyron-Gleichung sowie die Definitionen der trockenspezifischen (Partial-)Entropien (vgl. [Emanuel, 1994, S. 119f]), so erhält man folgenden Ausdruck für die trockenspezifische Gesamtentropie:

$$s = c_p \ln T - R_d \ln p_d - r_v R_v \ln \mathcal{H} + \frac{r_v L_v}{T} \quad (2.32)$$

mit

$$c_p \equiv c_{pd} + r_t c_{pl} \quad (2.33)$$

als „effektive“ Wärmekapazität. Der Einfachheit halber wird im Folgenden s nur noch als Entropie bezeichnet.

Die äquivalentpotentielle Temperatur θ_e ist nun so definiert, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$c_p \ln \theta_e \equiv s + R_d \ln p_0. \quad (2.34)$$

Daraus folgt

$$\theta_e = T \left(\frac{p_0}{p_d} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} \mathcal{H}^{-\frac{r_v R_v}{c_p}} \exp \left[\frac{L_v r_v}{c_p T} \right]. \quad (2.35)$$

²Für typische, atmosphärische Bewegungsvorgänge lässt sich sagen, dass jeder adiabatische Vorgang auch reversibel ist. Solche Vorgänge sind *isentrop* und somit auch entropieerhaltend. Es gibt jedoch auch Vorgänge, die adiabatisch, aber nicht reversibel sind und damit eine Entropieänderung implizieren. Darauf wird in Kapitel 4 noch genauer eingegangen.

Physikalisch gesehen ist die äquivalentpotentielle Temperatur diejenige Temperatur, die sich theoretisch ergibt, wenn der in einem Luftpaket enthaltene Wasserdampf vollständig kondensiert und die vorher im Wasserdampf vorhandene, latente Wärme nun an die Luft abgegeben wird, welche anschließend trockenadiabatisch auf den Referenzdruck p_0 gebracht wird.

2.3 Innere Energie und Enthalpie

Die innere Energie eines Gases ist eine Energieform, welche der Summe der kinetischen Energien aller im betrachteten Volumen vorhandenen Moleküle proportional ist. Damit wird der *mikroskopische* Zustand des Gases beschrieben. Dies steht im Gegensatz zu zwei weiteren wichtigen Energieformen, der kinetischen und potentiellen Energie, welche aber ihrerseits das *makroskopische* System Gasvolumen beschreiben (Etling [2008]).

Die innere Energie eines Luftgemisches, welches in unserem Fall aus trockener Luft, Wasserdampf und Flüssigwasser bestehen soll, lässt sich als Summe der partiellen inneren Energien darstellen. Diese lauten nach [Satoh u. a., 2008, Appendix B]:

$$e_d = c_{vd}T, \quad e_v = c_{vv}T + L_{00}, \quad e_l = c_{pl}T. \quad (2.36)$$

Diese Größen sind hierbei in spezifischer Form angegeben, also als partielle innere Energien pro Einheitsmasse, mit der Einheit J kg^{-1} . Der Term $L_{00} = 3,14762 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ ist die latente Verdampfungswärme bei 0 K. Analog dazu lassen sich auch spezifische Partialenthalpien definieren:

$$h_d = c_{pd}T, \quad h_v = c_{pv}T + L_{00}, \quad h_l = c_{pl}T. \quad (2.37)$$

Damit lassen sich die feuchte Enthalpie und innere Energie wie folgt darstellen:

$$h = q_d c_{pd}T + q_v (c_{pv} + L_{00})T + q_l c_{pl}T, \quad (2.38)$$

$$e = h - \frac{p}{\rho} = q_d c_{vd}T + q_v (c_{vv} + L_{00})T + q_l c_{pl}T. \quad (2.39)$$

Dabei wurden die Zustandsgleichung idealer Gase

$$p = \rho(q_d R_d + q_v R_v)T \quad (2.40)$$

und folgende Beziehungen zwischen den Gaskonstanten und den spezifischen Wärmen benutzt:

$$R_d = c_{pd} - c_{vd}, \quad R_v = c_{pv} - c_{vv}. \quad (2.41)$$

Gleichung (2.39) lässt sich auch als Summe des sensiblen und latenten Teils der inneren Energie schreiben:

$$e = e_{sens} + e_{lat} = (q_d c_{vd} + q_v c_{vv} + q_l c_{pl})T + q_v L_{00} . \quad (2.42)$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich leicht erkennen, dass die absolute Temperatur linear in die innere Energie eingeht, was im Einklang mit ihrer Definition steht, nämlich der Proportionalität der Summe der kinetischen Energien der Moleküle.

Die Enthalpie $h = e + p/\rho$ lässt sich, physikalisch gesehen, als Summe von innerer Energie und Druckarbeit auffassen. Außerdem wird anhand ihrer Definition klar, warum die latente Verdampfungswärme L_v auch als Verdampfungsenthalpie bezeichnet wird, denn:

$$\Delta h_v = h_v - h_l = L_{00} + (c_{pv} - c_{pl})T \equiv L_v(T) . \quad (2.43)$$

3 Numerik

3.1 Das Modell ASAM

Alle Implementierungen und Rechnungen von Testbeispielen wurden an dem am Leibnitz-Institut für Troposphärenforschung in Leipzig entwickelten Strömungsmodell ASAM (*All Scale Atmospheric Model*) vorgenommen. Dieses Modell unterliegt ständigen Weiterentwicklungen und kann für Forschungszwecke vielseitig verwendet werden. Der Vorteil, der das Modell auszeichnet, ist, dass diverse atmosphärische Phänomene der unterschiedlichsten Skalen modelliert werden können. Das ASAM-Modell ist imstande, mit einem kartesischen oder sphärischen Koordinatensystem zu rechnen. Orographie oder Hindernisse (z.B. Gebäude) können mit sogenannten *cut cells* in das Gitter eingebaut werden. Eine Aufteilung des Gitters in verschiedene Blöcke ist möglich, welche paralleles Rechnen erlaubt. In kartesischen Koordinatensystemen wird mit einem verschobenen Gitter (*staggered grid*) gerechnet, in dem die skalaren Größen in der Zellmitte und die Vektorgröße Windgeschwindigkeit am Rand der Zelle existieren. Dadurch können die Differenzenquotienten genauer berechnet werden und Diskretisierungsfehler, die durch die Entkopplung von Skalar- und Vektorgrößen entstehen, werden vermieden. Zudem sind neben einem Bulk-Mikrophysikschema sowohl Strahlungs- als auch Chemiemodule implementiert. Ein wichtiger Aspekt für die Modellierung atmosphärischer Prozesse, welcher letztendlich auch ein zentraler Bestandteil dieser Arbeit ist, ist die Formulierung der Thermodynamik. Die thermodynamischen Gleichungen in diesem Modell unterscheiden sich von denen in den meisten, operationell eingesetzten Wettermodellen. So rechnet der Deutsche Wetterdienst (DWD) in seinem COSMO-Modell (*Consortium for Small-scale Modeling*) mit der absoluten Temperatur (Baldauf u. a. [2010]) und das WRF-Modell (*Weather Research and Forecasting*) mit der trockenen potentiellen Temperatur (Skamarock u. a. [2008]). In ASAM hingegen wurde standardmäßig die verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur verwendet, in der die Gaskonstante und die spezifischen Wärmekapazitäten der feuchten Wolkenluft verwendet und nicht durch deren Größen für trockene Luft approximiert werden.

Die Zeitdiskretisierung wird im Modell durch die Rosenbrock-Methode in

Kombination mit der approximierenden Matrix-Faktorisierung (AMF) realisiert. Dadurch soll der numerische Aufwand bei der Lösung der linearen Gleichungssysteme verringert werden. Diese Methode wird im folgenden Kapitel genauer erläutert.

3.2 Zeitdiskretisierungsverfahren

Um ein prognostisches Gleichungssystem zu formulieren, in welchen die Variablen Erhaltungseigenschaften aufweisen sollen, eignet es sich, Flussgrößen zu definieren:

$$\vec{V} = \rho \vec{v}, \quad (3.1)$$

$$\Theta = \rho \theta. \quad (3.2)$$

Knoth [2006] stellt ein Zeitdiskretisierungsverfahren für die kompressiblen Euler-Gleichungen, gültig für eine trockene Atmosphäre, vor.

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v} \cdot \vec{v}) = -\nabla p - \rho g \vec{k} - \vec{F}_c. \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial(\rho \theta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \theta \vec{v}) = Q_\theta. \quad (3.5)$$

Wie an späterer Stelle noch gezeigt wird, lässt sich mit der hier aufgezeigten Numerik auch das komplexere System feuchte Atmosphäre effizient modellieren. Um dieses System zu schließen, muss der Druck noch bestimmt werden, was diagnostisch über die Zustandsgleichung möglich ist.

Als Erstes erfolgt die räumliche Diskretisierung, so dass man das System als gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$y' = F(y) \quad (3.6)$$

schreiben kann. Im Anschluss daran erfolgt die Zeitintegration mittels einer speziellen Rosenbrock-Methode nach Lanser u. a. [2001]. Die Vorgehensweise der Diskretisierungsreihenfolge wird auch als Linienmethode bezeichnet. Eine Euler-vorwärts-Diskretisierung führt zu:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = F(y^n) + F'(y^n)(y^{n+1} - y^n), \quad (3.7)$$

wobei

$$F'(y^n) = J \quad (3.8)$$

gerade die Jacobi-Matrix ist und folgende Form hat:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\varrho}{\partial \varrho} & \frac{\partial F_\varrho}{\partial \vec{V}} & 0 \\ \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \varrho} & \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \vec{V}} & \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \Theta} \\ 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \vec{V}} & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \Theta} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Diese Matrix kann in zwei separate Matrizen aufgeteilt werden, wobei es dafür selbst zwei verschiedene Ansätze gibt:

$$J = J_T + J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\varrho}{\partial \varrho} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \varrho} & \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \vec{V}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \Theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F_\varrho}{\partial \vec{V}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \Theta} \\ 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \vec{V}} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

oder

$$J = J_T + J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\varrho}{\partial \varrho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \vec{V}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \Theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F_\varrho}{\partial \vec{V}} & 0 \\ \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \varrho} & 0 & \frac{\partial F_{\vec{V}}}{\partial \Theta} \\ 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \vec{V}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Dabei repräsentiert die erste Matrix J_T den Transport- und Quellenteil und beinhaltet Advektion, Diffusion sowie die Quellterme. Die zweite Matrix J_P ist für den Druck verantwortlich. Die erste Variante der Separierung ist absolut stabil für Schallwellen, während die zweite Variante sowohl für Schallwellen als auch Schwerewellen stabil ist. Diese zusätzliche Stabilität wird durch eine Helmholtz-Gleichung doppelter Dimension erreicht. Beide Systeme können mithilfe des Verfahrens der konjugierten Gradienten (*conjugate gradients*, *CG*) mit geeigneter Vorkonditionierung (*preconditioning*) gelöst werden.

Die Rosenbrock-Methode zählt dadurch zu den linear impliziten Zeitintegrationsverfahren, in der Zeitschrittbeschränkungen (bei kleinen Gitterweiten z.B. nahe den Polen oder kleinen *cut cells*) durch die voll-implizite Behandlung der Gleichungen vermieden werden.

4 Modellformulierungen

Das Hauptziel dieses Kapitels ist es, ein mathematisches Modell zu formulieren, welches atmosphärische Strömungen simuliert, wobei die Atmosphäre auch Wasserdampf und Flüssigwasser enthalten kann. Es sollen Phasenumwandlungen zwischen Wasserdampf und Flüssigwasser stattfinden und es werden Wasserdampfflüsse einbezogen. Letzteres ist sinnvoll beim Vorhandensein einer Wasserfläche (z.B. Ozean) oder einer feuchten Bodenschicht, da durch Verdunstungsprozesse zusätzlicher Wasserdampf erzeugt wird. Des Weiteren sollen Regentropfen, welche eine hinreichend große Masse besitzen, als Niederschlag in Richtung Boden fallen können, also eine zusätzliche Vertikalgeschwindigkeit besitzen. Dieser Niederschlag besteht in unserem Fall ausschließlich aus Flüssigwasser, da der Einfachheit halber keine Eisphasen betrachtet werden. Unter Beachtung dieser Voraussetzungen wurden vier verschiedene thermodynamische Variablen in das Modell implementiert. Diese sind die verallgemeinerte virtuelle Temperatur θ_v , die äquivalentpotentielle Temperatur bzw. Entropie θ_e , die Gesamtenergie E und der Luftdruck p . In der letzten Variante wird jedoch zusätzlich auf die Gleichung für die Gesamtenergie zurückgegriffen, da die Gleichung für den Luftdruck – im Gegensatz zu den drei anderen Versionen – nicht in einer konservativen Form aufgestellt ist. Dieses Kapitel bildet daher die Grundlage für die Durchführung der Testbeispiele in Kapitel 5.

4.1 Die kompressiblen Euler-Gleichungen

Die zeitliche, materielle Ableitung einer skalaren oder vektoriellen Größe $\chi = \chi(x, y, z, t)$ lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial\chi}{\partial t} + u \frac{\partial\chi}{\partial x} + v \frac{\partial\chi}{\partial y} + w \frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{\partial\chi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\chi. \quad (4.1)$$

Gleichung (4.1) stellt die *advective Form* des zeitlichen Differenzials der Größe χ dar, wobei u , v und w die Komponenten des kartesischen Windgeschwindigkeitsvektors sind. In unserem Modell sind die Gleichungen jedoch in der *Flussform* aufgestellt und mit der Gesamtluftdichte multipliziert. Dadurch bleibt die Gesamtmasse nach jedem Modelllauf erhalten.

Das Grundgleichungssystem unseres Modells besteht aus der Euler-Gleichung (Bewegungsgleichung), der Kontinuitätsgleichung, einer Energie- oder Temperaturgleichung und Gleichungen für den Wasserdampf- und Flüssigwassergehalt. Dadurch erfolgt eine quantitative Beschreibung der atmosphärischen Bewegungsvorgänge mittels der Zustandsvariablen Windgeschwindigkeit, Gesamtluftdichte, einer thermodynamischen Variable und den spezifischen Größen zur Beschreibung des Wassergehalts. Dieses Gleichungssystem in kompressibler Form sei im Folgenden zusammengefasst:

$$\frac{D(\varrho\vec{v})}{Dt} = \frac{\partial(\varrho\vec{v})}{\partial t} + \nabla(\varrho\vec{v} \cdot \vec{v}) = -\nabla p - \varrho g \vec{k} - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_{fw}), \quad (4.2)$$

$$\frac{D\varrho}{Dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho\vec{v}) = Q_v - Q_{fall}, \quad (4.3)$$

$$\frac{D(\varrho\theta_x)}{Dt} = \frac{\partial(\varrho\theta_x)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho\theta_x\vec{v}) = \varrho \frac{d\theta_x}{dt} + \theta_x(Q_v - Q_{fall}), \quad (4.4)$$

$$\frac{D\varrho_v}{Dt} = \frac{\partial\varrho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_v\vec{v}) = Q_v + Q_{ph}, \quad (4.5)$$

$$\frac{D\varrho_l}{Dt} = \frac{\partial\varrho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_l\vec{v}) = -Q_{ph} - Q_{fall}. \quad (4.6)$$

Auf der rechten Seite der Euler'schen Bewegungsgleichung (4.2) soll die Corioliskraft $\vec{F}_C = 2\vec{\Omega} \times (\varrho\vec{v})$ vernachlässigt werden. Es verbleiben also die Druckgradientkraft und die Schwerkraft. Dabei sind $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ die Schwerebeschleunigung und \vec{k} der Einheitsvektor in z-Richtung.

Die Kontinuitätsgleichung (4.3) beschreibt das Verhalten der Dichte in einem Volumenelement. Im Falle der Abstinenz des Wasserdampfflusses und des Niederschlags existieren keine zusätzlichen Quellen/Senken in der Gesamtdichte und man erhält die „klassische“ Definition der Kontinuitätsgleichung.

Die rechte Seite von Gleichung (4.4) ergibt sich durch Differenzierung des Produktes der Dichte ϱ und der thermodynamischen Variable, welche hier allgemein als θ_x bezeichnet werden soll.

$$\begin{aligned} \frac{d(\varrho\theta_x)}{dt} &= \varrho \frac{d\theta_x}{dt} + \theta_x \frac{d\varrho}{dt} = \varrho \frac{d\theta_x}{dt} + \theta_x(-\varrho\nabla \cdot \vec{v} + Q_v - Q_{fall}) \\ &= -\varrho\theta_x\nabla \cdot \vec{v} + \varrho \frac{d\theta_x}{dt} + \theta_x(Q_v - Q_{fall}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bringt man den ersten Term der rechten Seite von Gleichung (4.7) auf die linke Seite, erhält man die Flussform dieser Gleichung, welche dann genau Gleichung (4.4) entspricht. Der Term $d\theta_x/dt$ hängt von der Wahl der thermodynamischen Variable ab und muss daher immer gesondert berechnet werden.

Gleichungen (4.5) und (4.6) sind formal auch Kontinuitätsgleichungen – sie weisen die gleiche Struktur wie Gleichung (4.3) auf. Der Wasserdampfproduktion-

stern sowie Phasenumwandlungen von Flüssigwasser zu Wasserdampf (Verdunstung) bilden die rechte Seite von Gleichung (4.5). Änderungen des Flüssigwassers entstehen durch Kondensation und Niederschlag. Man beachte, dass die beiden Gleichungen auch durch die spezifischen Größen ausgedrückt werden können:

$$\frac{D(\varrho q_v)}{Dt} = \frac{\partial(\varrho q_v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho q_v \vec{v}) = Q_v + Q_{ph}, \quad (4.8)$$

$$\frac{D(\varrho q_l)}{Dt} = \frac{\partial(\varrho q_l)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho q_l \vec{v}) = -Q_{ph} - Q_{fall}. \quad (4.9)$$

Subtrahiert man Gleichungen (4.5) und (4.6) von Gleichung (4.3), so erhält man eine prognostische Gleichung für die Dichte trockener Luft:

$$\frac{D\varrho_d}{Dt} = \frac{\partial\varrho_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_d \vec{v}) = 0. \quad (4.10)$$

In der advektiven Form lauten die Dichtegleichungen

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho \nabla \cdot \vec{v} + Q_v - Q_{fall}, \quad (4.11)$$

$$\frac{d\varrho_v}{dt} = -\varrho_v \nabla \cdot \vec{v} + Q_v + Q_{ph}, \quad (4.12)$$

$$\frac{d\varrho_l}{dt} = -\varrho_l \nabla \cdot \vec{v} - Q_{ph} - Q_{fall}, \quad (4.13)$$

$$\frac{d\varrho_d}{dt} = -\varrho_d \nabla \cdot \vec{v}. \quad (4.14)$$

Wie sich später noch zeigen wird, ist es an einigen Stellen von Vorteil, mit den Mischungsverhältnissen anstelle der Gesamtdichten zu rechnen.

$$\begin{aligned} \frac{dr_v}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\varrho_v}{\varrho_d} \right) = \frac{\varrho_d \frac{d\varrho_v}{dt} - \varrho_v \frac{d\varrho_d}{dt}}{\varrho_d^2} \\ &= \frac{-\varrho_d(\varrho_v \nabla \cdot \vec{v} + Q_v + Q_{ph}) - \varrho_v(-\varrho_d \nabla \cdot \vec{v})}{\varrho_d^2} \\ &= \frac{1}{\varrho_d} (Q_v + Q_{ph}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Analog dazu ist

$$\frac{dr_l}{dt} = -\frac{1}{\varrho_d} (Q_{ph} + Q_{fall}) \quad (4.16)$$

und insbesondere

$$\frac{dr_t}{dt} = \frac{dr_v}{dt} + \frac{dr_l}{dt} = \frac{1}{\varrho_d} (Q_v - Q_{fall}). \quad (4.17)$$

Ebenso lassen sich die Tendenzgleichungen für die spezifischen Dichten berechnen:

$$\frac{dq_v}{dt} = \frac{1}{\varrho} (Q_v + Q_{ph} - q_v[Q_v - Q_{fall}]) , \quad (4.18)$$

$$\frac{dq_l}{dt} = -\frac{1}{\varrho} (Q_{ph} + Q_{fall} - q_l[Q_v - Q_{fall}]) , \quad (4.19)$$

$$\frac{dq_d}{dt} = \frac{1}{\varrho} (q_d[Q_{fall} - Q_v]) . \quad (4.20)$$

4.2 Berechnung der Quellterme

4.2.1 Phasenumwandlungsterm

Bei der Berechnung des Phasenumwandlungsterm wird in unserem Modell auf die aus der Optimierung bekannten Fischer-Burmeister-Funktion φ zurückgegriffen (siehe dazu z.B. Kong u. a. [2007]):

$$\varphi(a,b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} . \quad (4.21)$$

$\varphi(a,b)$ ist eine NCP-Funktion (*Nonlinear Complementarity Problem*) und weist folgende Eigenschaft auf:

$$\varphi(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0 . \quad (4.22)$$

Für unseren Fall setzen wir

$$a \equiv \varrho_v^*(T) - \varrho_v \quad (4.23)$$

und

$$b \equiv \varrho_l , \quad (4.24)$$

wobei $\varrho_v^*(T)$ dabei die Dichte des Wasserdampfs bei Sättigung ist. Sie wird über den Sättigungsdampfdruck berechnet:

$$\varrho_v^*(T) = \frac{e_s(T)}{R_v T} . \quad (4.25)$$

Der Ausdruck $\varrho_v^*(T) - \varrho_v$ wird als Sättigungsdefizit bezeichnet. Dies ist genau diejenige Menge an Wasserdampf, die das Luftgemisch bis zur Sättigung ($\mathcal{H} = 1$) noch aufnehmen kann. Der Phasenumwandlungsterm lautet also unter Beachtung der Einheit

$$\Delta t Q_{ph}(\varrho_v^*(T) - \varrho_v, \varrho_l) = \varrho_v^*(T) - \varrho_v + \varrho_l - \sqrt{(\varrho_v^*(T) - \varrho_v)^2 + \varrho_l^2} \quad (4.26)$$

und ist somit nur von den Dichten des Wasserdampfs und Flüssigwassers sowie der absoluten Temperatur abhängig.

Es sollen nun zwei Fälle betrachtet werden, in denen Phasenumwandlungen stattfinden können. Ist $\varrho_v > \varrho_v^*(T)$, so ist Q_{ph} negativ; es tritt also Kondensation ein ($\varrho_v \rightarrow \varrho_l$). Herrschen hingegen ungesättigte Verhältnisse ($\varrho_v < \varrho_v^*(T)$), kommt es nur dann zu Verdunstung, wenn Wolkenwasser vorhanden ist ($\varrho_l > 0$).

In der Literatur finden sich noch zahlreiche andere Formulierungen zur Berechnung der Phasenumwandlungsrate. Neben iterativen Verfahren (z.B. bei [Bryan u. Fritsch, 2002, Gl. (27)]) wird häufig auch Folgendes verwendet:

$$Q_{ph} = -\Phi_c(q_v - q_{vs})q_{lmax} \tanh\left(\frac{q_l}{q_{lmax}}\right)\varrho, \quad (4.27)$$

wobei $q_{vs} = 0,622(e_s(T)/[p - e_s(T)])$ die spezifische Sättigungsfeuchte ist. $q_{lmax} = 10^{-5}$ und Φ_c sind Konstanten, wobei der Relaxationsfaktor Φ_c so gewählt werden muss, dass die Zeitdiskretisierung den Prozess der Phasenumwandlung bei gegebener Gitterweite auflösen kann (Reisner u. a. [2005]). Darüberhinaus ist es möglich, den Phasenumwandlungsterm Q_{ph} über einen sogenannten Anpassungsprozess (*adjustment process*) zu bestimmen. Dabei werden diagnostisch die neuen Werte für q_v und q_l bestimmt – allerdings mit der Einschränkung, dass Übersättigung nicht erlaubt ist. (Satoh [2003])

Der Vorteil der Formulierung in unserem Modell ist, dass Q_{ph} direkt berechnet wird und auch leichte Übersättigung erreicht werden kann, was wiederum im Einklang mit realen atmosphärischen Prozessen steht.

4.2.2 Wasserdampfproduktionsterm

Der Term Q_v repräsentiert die Produktion von Wasserdampf, welche – wie bereits anfangs erwähnt – durch Verdunstungsprozesse über Wasserflächen oder Bodenschichten entsteht. Ein Bodenmodell, welches geeignete Parametrisierungen für Q_v beinhaltet, wurde bereits in ASAM implementiert. Da jene Parametrisierungen aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein sollen, sei hier auf die entsprechende Literatur verwiesen: [Literatur?].

Dennoch soll hier schon einmal vorweggenommen werden, dass für das dritte Testbeispiel aus Kapitel 5 eine eigene Quellfunktion definiert wird, um dem System Wasserdampf zuzuführen und somit die korrekte Implementierung von Q_v zu testen. Näheres dazu kann dann in der Beschreibung des Testbeispiels nachgelesen werden.

4.2.3 Niederschlagsterm

Für die Bestimmung des Niederschlagsterms $Q_{fall} = \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f)$ muss zuerst eine geeignete Funktion für die Fallgeschwindigkeit W_f gefunden werden. Ist dieser

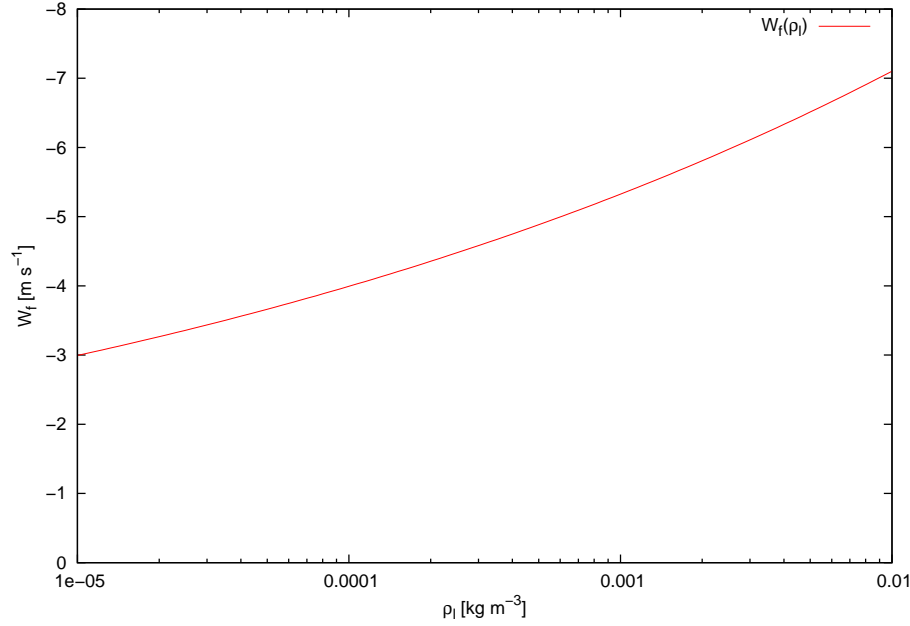


Abbildung 4.1: Fallgeschwindigkeiten von Regentropfen in Abhängigkeit von der Dichte des Flüssigwassers

Ausdruck dann bestimmt, wird anschließend die partielle Vertikalableitung in die Advektionsroutine implementiert.

Zur Berechnung der zusätzlichen Vertikalgeschwindigkeit der Regentropfen wird eine Parameterisierung nach Frisius u. Wacker [2007] verwendet. Dabei hängt die empirische Funktion W_f allein von Dichte des Flüssigwassers ab:

$$W_f(\varrho_l) = -c_r \frac{\Gamma(4,5)}{6} \left(\frac{\varrho_l}{\pi \varrho_W N_{0r}} \right)^{1/8}. \quad (4.28)$$

Dabei sind $c_r = 130 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ und $N_{0r} = 8 \times 10^6 \text{ m}^{-4}$ Parameter, $\varrho_W = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ist die Dichte von Wasser, Γ die Gammafunktion sowie $\pi = 3,14159265$ die Kreiszahl. In Abbildung 4.1 ist die Sedimentationsgeschwindigkeit W_f für den Bereich $0,01 < \varrho_l < 10 \text{ g kg}^{-1}$ dargestellt.

Betrachtet man Gleichungen (4.3) und (4.6) und schreibt den Niederschlagsterm aus, so folgt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\varrho \vec{v}_h) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w) = - \frac{\partial}{\partial z}(W_f \varrho_l) + Q_v \quad \text{und} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \varrho_l}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\varrho_l \vec{v}_h) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l w) = - \frac{\partial}{\partial z}(W_f \varrho_l) - Q_{ph}, \quad (4.30)$$

wobei $\vec{v}_h = (u, v)^T$ der horizontale Windgeschwindigkeitsvektor ist und $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)^T$ den Nabla-Operator für die Horizontalkomponenten darstellt. Nun können die Sedimentationsterme auf den rechten Seiten der beiden Gleichungen in die Advektionsterme der linken Seite integriert werden.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\varrho \vec{v}_h) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho w + \varrho_l W_f) = Q_v, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \varrho_l}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\varrho_l \vec{v}_h) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l [w + W_f]) = -Q_{ph}. \quad (4.32)$$

Der Term Q_{fall} taucht auch auf den rechten Seiten der prognostischen Gleichungen der thermodynamischen Variablen auf. Dort kann analog wie bei den Dichtegleichungen verfahren werden, allerdings sind die entsprechenden Vorfaktoren zu beachten, welche das Ergebnis der zeitlichen Differentiation der thermodynamischen Variablen sind und im folgenden Unterkapitel hergeleitet werden.

4.2.4 Quellterme thermodynamischer Variablen

Für jedes θ_x muss der Quellterm $d\theta_x/dt$ auf der rechten Gl. (4.4) separat berechnet werden. Die Berechnung dieses zeitlichen Differentials ist oftmals relativ aufwändig. Daher sind die Herleitungen der Quellterme in Appendix B nachzulesen. Darüberhinaus erhält man jeweils unterschiedliche diagnostische Zusammenhänge zu anderen meteorologischen Größen. Als wichtigste davon ist die absolute Temperatur zu nennen, da aus ihr (über die Zustandsgleichung idealer Gase) der Luftdruck und weitere diagnostische Größen berechnet werden können (Sättigungsdampfdruck, relative Feuchte, Energie etc.).

4.2.4.1 Verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur

Der Quellterm für die verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_\varrho}{dt} &= \frac{\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\frac{R_v}{R_m} - \frac{\varrho_d}{\varrho} - \ln \tilde{\pi} \left[\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right] \right) Q_v \\ &\quad - \frac{\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\ln \tilde{\pi} \frac{c_{pl} - c_{pv}}{c_{pml}} + \frac{L_v}{c_{pml} T} - \frac{R_v}{R_m} \right) Q_{ph} \\ &\quad + \frac{\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\frac{c_{pl}}{c_{pml}} [1 - \ln \tilde{\pi}] + \frac{\varrho_d}{\varrho} \right) Q_{fall} - \frac{\theta_\varrho}{\varrho_d c_{pml}} \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l e_l W_f) - \theta_\varrho \frac{\varrho_l g W_f}{\varrho_d c_{pml}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

mit dem in Kapitel 2.2 hergeleiteten Ausdruck für die verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur:

$$\theta_\varrho \equiv \tilde{\theta} \frac{1 + r_v/\varepsilon}{1 + r_v + r_l}. \quad (4.34)$$

Die Flussformgleichung für θ_ϱ gemäß Gl. (4.4) ist dann:

$$\begin{aligned}
\frac{D(\varrho\theta_\varrho)}{Dt} &= \frac{\varrho\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\frac{R_v}{R_m} - \frac{\varrho_d}{\varrho} - \ln \tilde{\pi} \left[\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right] \right) Q_v \\
&\quad - \frac{\varrho\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\ln \tilde{\pi} \frac{c_{pl} - c_{pv}}{c_{pml}} + \frac{L_v}{c_{pml}T} - \frac{R_v}{R_m} \right) Q_{ph} \\
&\quad + \frac{\varrho\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\frac{c_{pl}}{c_{pml}} [1 - \ln \tilde{\pi}] + \frac{\varrho_d}{\varrho} \right) Q_{fall} - \frac{\varrho\theta_\varrho}{\varrho_d c_{pml}} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l e_l W_f) \\
&\quad - \varrho\theta_\varrho \frac{\varrho_l g W_f}{\varrho_d c_{pml}} + \theta_\varrho (Q_v - Q_{fall}) \\
&= \frac{\varrho\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\frac{R_v}{R_m} - \ln \tilde{\pi} \left[\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right] \right) Q_v \\
&\quad - \frac{\varrho\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\ln \tilde{\pi} \frac{c_{pl} - c_{pv}}{c_{pml}} + \frac{L_v}{c_{pml}T} - \frac{R_v}{R_m} \right) Q_{ph} \\
&\quad + \frac{\varrho\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\frac{c_{pl}}{c_{pml}} [1 - \ln \tilde{\pi}] \right) \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f) - \frac{\varrho\theta_\varrho}{\varrho_d c_{pml}} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) \\
&\quad - \varrho\theta_\varrho \frac{\varrho_l W_f g}{\varrho_d c_{pml}}. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Um diagnostisch weitere Größen aus der verallgemeinerten virtuellen potentiellen Temperatur bestimmen zu können, eignet es sich, zuerst die absolute Temperatur zu berechnen. Dazu erweitert man von Zähler und Nenner von Gleichung (4.34) ersetzt den Luftdruck p durch die Zustandsgleichung idealer Gase:

$$\begin{aligned}
\theta_\varrho &= \theta \frac{\varrho_d + \frac{R_v}{R_d} \varrho_v}{\varrho} \tag{4.36} \\
\Rightarrow \varrho\theta_\varrho &= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa_m} \left(\varrho_d + \frac{R_v}{R_d} \varrho_v \right), \\
&= T \left(\frac{p_0}{(\varrho_d R_d + \varrho_v R_v) T} \right)^{\kappa_m} \left(\varrho_d + \frac{R_v}{R_d} \varrho_v \right), \\
&= T^{1-\kappa} \left(\frac{p_0}{(\varrho_d R_d + \varrho_v R_v)} \right)^{\kappa_m} \left(\varrho_d + \frac{R_v}{R_d} \varrho_v \right). \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Damit lässt sich θ_ϱ explizit nach T auflösen und wir erhalten

$$T = \left(\left[\frac{\varrho_d R_d + \varrho_v R_v}{p_0} \right]^{\kappa_m} \frac{1}{\varrho_d + \frac{R_v}{R_d} \varrho_v} \right)^{\frac{1}{1-\kappa_m}} (\varrho\theta_\varrho)^{\frac{1}{1-\kappa_m}}. \tag{4.38}$$

Eine Gleichung für den Luftdruck p in Abhängigkeit von θ_ϱ findet man, indem man die Zustandsgleichung für ideale Gase (2.3) mit der verallgemeinerten

virtuellen Temperatur (2.27) schreibt:

$$p = \varrho R_d T \frac{1 + r_v/\epsilon}{1 + r_v + r_l} = \varrho R \theta_e \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\kappa_m} = \left(\frac{\varrho R_d \theta_e}{p_0^{\kappa_m}} \right)^{1/(1-\kappa_m)}. \quad (4.39)$$

Alternativ ist es natürlich auch möglich, den Luftdruck direkt über die Zustandsgleichung idealer Gase zu berechnen, da die absolute Temperatur bereits diagnostisch bestimmt wurde.

4.2.4.2 Äquivalentpotentielle Temperatur

Mit dem im Anhang hergeleiteten Quellterm folgt für die rechte Seite der Tendenzgleichung der äquivalentpotentiellen Temperatur:

$$\begin{aligned} \frac{D(\varrho\theta_e)}{Dt} = & - \frac{\varrho\theta_e}{\varrho_d c_p} R_v \ln \mathcal{H} Q_{ph} \\ & + \left[\frac{\varrho\theta_e}{\varrho_d c_p} \left(\frac{L_v}{T} - R_v \ln \mathcal{H} - \frac{c_{pl}}{c_p} \left[R_d \ln \left(\frac{p_0}{p_d} \right) + r_v R_v \ln \mathcal{H} + \frac{r_v L_v}{T} \right] \right) + \theta_e \right] Q_v \\ & + \left[\frac{\varrho\theta_e}{\varrho_d c_p} \frac{c_{pl}}{c_p} \left(R_d \ln \left[\frac{p_0}{p_d} \right] - r_v R_v \ln \mathcal{H} + \frac{r_v L_v}{T} \right) - \theta_e \right] \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f) \\ & - \frac{\varrho\theta_e}{\varrho_d c_p} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) - \frac{\varrho\theta_e \varrho_l g W_f}{\varrho_d c_p} \end{aligned} \quad (4.40)$$

mit

$$\theta_e = T \left(\frac{p_0}{p_d} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} \mathcal{H}^{-\frac{r_v R_v}{c_p}} \exp \left(\frac{L_v r_v}{c_p T} \right). \quad (4.41)$$

Die physikalische Bedeutung des ersten Terms auf der rechten Seite von Gleichung (4.40) ist folgende: Fällt beispielsweise ein Regentropfen in ein untersättigtes Gebiet ($\mathcal{H} < 1$), so kommt es zu einer irreversiblen Entropieproduktion, da der Regentropfen allmählich verdunstet. Eine Umkehrung dieses Vorgangs ist nicht möglich, da in einer nicht-gesättigten Atmosphäre kein Flüssigwasser produziert werden kann. Außerdem kann man erkennen, dass die absolute Temperatur T nichtlinear in θ_e eingeht und man dadurch nicht explizit nach T auflösen kann. Aus diesem Grund wurde für die Berechnung von T ein Newton-Verfahren nach Sebah u. Gourdon [2001] implementiert. Mit einem Newton-Verfahren kann iterativ die Nullstelle einer differenzierbaren Funktion $f(x) = 0$ mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden. Man beginnt mit einer ersten, „geratenen“ Nullstelle T_0 (man wählt dafür z.B. die Temperatur aus dem vorangegangenen Zeitschritt) und findet folgendermaßen die neuen Nullstellen:

$$T_{n+1} = T_n - \frac{f(T_n)}{f'(T_n)}, \quad (4.42)$$

wobei

$$f(T) = T \left(\frac{p_0}{p_d} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} \mathcal{H}^{-\frac{r_n R_v}{c_p}} \exp \left(\frac{L_v r_v}{c_p T} \right) - \theta_{e,n} = 0, \quad (4.43)$$

wobei $\theta_{e,n}$ die aktuelle, prognostisch berechnete, äquivalentpotentielle Temperatur ist. Diese Iteration wird so oft ausgeführt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. In unserem Modell wurde die Abbruchbedingung folgendermaßen gewählt:

$$|T_{n+1} - T_n| < 1 \times 10^{-6}. \quad (4.44)$$

Dieses Verfahren konvergiert in den meisten Fällen nach 4–6 Iterationsschritten. Logarithmieren von Gl. (4.41) und Bilden der ersten Ableitung nach T liefert

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \theta_e}{dT} &= \frac{1}{T} - \frac{R_d}{c_p T} - \frac{e_s(T)}{\varrho_d c_p T} \left(\frac{\varrho_v R_v}{e_s(T)} - \frac{\varrho_v R_v T \frac{de_s}{dT}}{e_s(T)^2} \right) + \frac{\varrho_v (c_{pv} - c_l)}{\varrho_d c_p T} - \frac{L_v \varrho_v}{\varrho_d c_p T^2} \\ &= \frac{1}{c_p T} \left(c_p - R_d - \frac{\varrho_v}{\varrho_d} R_v + \frac{\varrho_v}{\varrho_d} R_v T \frac{d \ln e_s}{dT} + \frac{\varrho_v}{\varrho_d} (c_{pv} - c_l) - \frac{\varrho_v L_v}{\varrho_d T} \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Für die Ableitung des Sättigungsdampfdrucks nach der Temperatur benutzen wir die Clausius-Clapeyron-Gleichung:

$$\frac{d \ln e_s}{dT} = \frac{L_v}{R_v T^2}. \quad (4.46)$$

Arrangieren der Terme und Vereinfachen führt zu der für die Newton-Iteration benötigten Ableitung $f'(T)$:

$$\frac{d\theta_e}{dT} = f'(T) = \frac{\theta_e}{c_p T} \left(c_p - R_d - \frac{\varrho_v}{\varrho_d} [R_v - c_{pv} + c_l] \right) = \frac{\theta_e}{c_p T} (c_{pml} - R_m). \quad (4.47)$$

Nach Berechnung der absoluten Temperatur wird der Luftdruck wiederum über die Zustandsgleichung idealer Gase bestimmt:

$$p = (\varrho_d R_d + \varrho_v R_v) T. \quad (4.48)$$

4.2.4.3 Gesamtenergie

Die Energieerhaltungsgleichung wurde mithilfe der inneren Energiegleichung, der Bewegungsgleichung und der Tendenzgleichung für die potentielle Energie hergeleitet (siehe Anhang B).

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ([E + p]\vec{v}) = (h_v + \phi + K)Q_v - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f [e_l + \phi + K]), \quad (4.49)$$

wobei

$$E = \varrho(e + \phi + K) = (\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl})T + \varrho_v L_{00} + \varrho \left(gz + \frac{\vec{v}^2}{2} \right). \quad (4.50)$$

Man erkennt, dass in der Energiegleichung keine Phasenumwandlungsterm Q_{ph} auftaucht. Dies rührt daher, da bei Phasenumwandlungen stets latente in sensible Wärme umgewandelt wird (und umgekehrt).

Anders als bei der äquivalentpotentiellen Temperatur, lässt sich die absolute Temperatur diagnostisch aus der Gesamtenergie errechnen:

$$T = \frac{E - \varrho_v L_{00} - \varrho \left(gz + \frac{\vec{v}^2}{2} \right)}{\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}}. \quad (4.51)$$

4.2.4.4 Luftdruck

Die Modellformulierung mit dem Luftdruck als prognostischer Variable kann als Sonderfall betrachtet werden, da sie einige Unterschiede zu den drei bisherigen Varianten aufweist. Das Hauptmerkmal dieser Formulierung ist, dass sowohl eine nicht-konservative Druckgleichung und die konservative Energiegleichung (aus dem vorherigen Unterkapitel) gleichzeitig benutzt werden. Darüber hinaus erfolgt nach jedem Zeitschritt eine diagnostische Druckaktualisierung. Diese Variante ist besonders geeignet für sehr kleinskalige¹ Phänomene, wie z.B. *shock tubes*. Dafür ist normalerweise ein sehr kleiner Zeitschritt vonnöten. Wie Kwatra u. a. [2009] zeigen, kann jedoch mit dieser Formulierung eine CFL-Zahl bis zu 300 erreicht werden. In Fedkiw u. a. [2000] wird eine Herleitung der nichtkonservativen Drucktendenzgleichung präsentiert – unter der Bedingung eines homogenen Grundgleichungssystems, d.h. ohne zusätzliche Quellterme auf den rechten Seite der Euler-Gleichungen. Des Weiteren sind in jener Arbeit die Gleichungen allgemein für ein Mehrphasenfluss mit insgesamt N Spezies formuliert. Diese Formulierung wurde in unser ASAM-Modell insofern übertragen, als dass wir – wie in den vorangegangenen Versionen auch – drei Spezies betrachten, nämlich die spezifischen Dichten für trockene Luft q_d , für Wasserdampf q_v und für Flüssigwasser q_l . Dafür werden (zusätzlich zu den „trockenen“ Euler-Gleichungen) $N - 1$ zusätzliche prognostische Gleichungen benötigt, da sich eine Spezies immer diagnostisch aus den anderen berechnen lässt. Für unseren Fall bedeutet dies:

$$q_d = 1 - q_v - q_l. \quad (4.52)$$

¹Kleinskalig bedeutet hier in dem Sinne, dass Zeitschritte bis in den Bereich $\Delta t = 10^{-8}$ s verwendet werden.

In Appendix B wird also eine Drucktendenzgleichung mit den eben erwähnten Multiphasen-Spezies und unter Beachtung der Quellterme auf den rechten Seiten der Gleichungen (4.11) – (4.13) hergeleitet. Sie lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = & -\varrho c^2 \nabla \cdot \vec{v} + \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} + \frac{h_v - e}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial e} + \frac{\partial p}{\partial \varrho_v} \right) Q_v + \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho_v} - \frac{\partial p}{\partial \varrho_l} \right) Q_{ph} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varrho_l W_f \left[\frac{e - e_l}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial e} - \frac{\partial p}{\partial \varrho} - \frac{\partial p}{\partial \varrho_l} \right] \right) - \varrho_l g W_f \frac{\partial p}{\partial e}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

mit

$$p = p(\varrho, e, \varrho_v, \varrho_l) \quad (4.54)$$

und der Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varrho} + \frac{p}{\varrho^2} \frac{\partial p}{\partial e} + \frac{\varrho_v}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varrho_v} + \frac{\varrho_l}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varrho_l}}. \quad (4.55)$$

Um die partiellen Ableitungen des Druckes zu berechnen, muss an dieser Stelle auf die Zustandsgleichung idealer Gase zurückgegriffen werden. Dazu schreibt man den Druck in der Form von Gleichung (4.54), also als Funktion der Gesamtdichte, der inneren Energie und den Partialdichten.

$$p = (\varrho_d R_d + \varrho_v R_v) T = ([\varrho - \varrho_v - \varrho_l] R_d + \varrho_v R_v) T. \quad (4.56)$$

Hierbei wird die absolute Temperatur durch die innere Energie ersetzt (siehe Satoh u. a. [2008]):

$$e = (\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}) T + \varrho_v L_{00} \quad (4.57)$$

$$\Rightarrow \varrho e = (\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}) T + \varrho_v L_{00}. \quad (4.58)$$

Damit ist die absolute Temperatur

$$T = \frac{\varrho e - \varrho_v L_{00}}{\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}} \quad (4.59)$$

und die Zustandsgleichung lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$p(\varrho, e, \varrho_v, \varrho_l) = \frac{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) R_d + \varrho_v R_v}{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}} (\varrho e - \varrho_v L_{00}). \quad (4.60)$$

Betrachtet man die Drucktendenzgleichung (4.53), so fällt auf, dass diese nicht in der Flussform, sondern in der advektiven Form geschrieben ist. Daher war es für diese Modellvariante nötig, eine neue Advektionsroutine in das ASAM-Modell zu implementieren. Zusätzlich dazu tritt auf der rechten Seite von Gleichung (4.53)

eine Geschwindigkeitsdivergenz auf, welche nicht eliminiert werden kann und daher diskretisiert werden muss. Dieser Term lässt sich physikalisch im Übrigen folgendermaßen interpretieren: Die Divergenz des Gesamtmassenflusses ($\rho\vec{v}$) führt zu einem Druckabfall, während dessen Konvergenz zu einem Druckanstieg führt (vgl. dazu auch [Etling, 2008, S. 106]). Bei den Diskretisierungen der Advektion und Divergenz muss aufgrund des verschobenen Gitters stets darauf geachtet werden, dass der Druck im Zentrum und die Windgeschwindigkeit auf der Kante einer Zelle existiert. Daher müssen Zellgrößen jeweils auf die Kante interpoliert werden und umgekehrt.

5 Numerische Tests

Text

5.1 “Dry Bubble”

Text

5.2 “Moist Bubble”

Text

5.3 “Moist Bubble” mit fallendem Niederschlag

Text Reisner u. a. [2005]

6 Diskussion und Ausblick

Diskussion und Ausblick ...

A Liste der Symbole

Lateinische Buchstaben

Größe	Wert/Definition	Beschreibung
c_p	$c_p = c_{pd} + r_t c_{pl}$	effektive spezifische Wärmekapazität für Wolkenluft bei konstantem Druck
c_{pd}	$1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität für trockene Luft bei konstantem Druck
c_{pl}	$4186 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität für Flüssigwasser bei konstantem Druck
c_{pml}	$c_{pml} = c_{pd} + r_v c_{pv} + r_l c_{pl}$	spezifische Wärmekapazität für Wolkenluft bei konstantem Druck
c_{pv}	$1885 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität für Wasserdampf bei konstantem Druck
c_{vd}	$717 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität für trockene Luft bei konstantem Volumen
c_{vml}	$c_{vml} = c_{vd} + r_v c_{vv} + r_l c_{pl}$	spezifische Wärmekapazität für Wolkenluft bei konstantem Volumen
c_{vv}	$1424 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität für Wasserdampf bei konstantem Volumen
g	$9,81 \text{ m s}^{-2}$	Schwerebeschleunigung
L_{00}	$3,148 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$	Latente Verdampfungswärme bei 0 K
L_v	$L_v = L_{00} + (c_{pv} - c_{pl})T$	Latente Verdampfungswärme
p_v	$p_v = \varrho_v R_v T$	Dampfdruck bzw. Wasserdampfpartialdruck
q_d	$q_d = \frac{\varrho_d}{\varrho}$	spezifische Dichte trockener Luft
q_l	$q_l = \frac{\varrho_l}{\varrho}$	spezifischer Flüssigwasser-Gehalt
q_v	$q_v = \frac{\varrho_v}{\varrho}$	spezifische Feuchte
r_l	$r_l = \frac{\varrho_l}{\varrho_d}$	Flüssigwasser-Mischungsverhältnis
r_t	$r_t = r_v + r_l$	Gesamtwassergehalt
r_v	$r_v = \frac{\varrho_v}{\varrho_d}$	Mischungsverhältnis
R	$R = \frac{R^*}{M}$	individuelle Gaskonstante
R^*	$R^* = 8,314 \text{ J (mol K)}^{-1}$	universelle Gaskonstante
R_d	$\frac{R^*}{M_d} = 287 \text{ J (kg K)}^{-1}$	individuelle Gaskonstante trockener Luft
R_v	$\frac{R^*}{M_v} = 462 \text{ J (kg K)}^{-1}$	individuelle Gaskonstante von Wasserdampf

Griechische Buchstaben

B Tendenzgleichungen der thermodynamischen Variablen

B.1 Innere Energie, absolute und potentielle Temperatur

Eine prognostische Gleichung für die innere Energie lässt sich aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik herleiten, vgl. dazu [Bott, 2008, Gl. (31)] und [Satoh u. a., 2008, Gl. (B.13)]

$$\frac{\partial(\varrho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho e \vec{v}) = -p \nabla \cdot \vec{v} + Q_e - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f e_l) - \varrho_l g W_f, \quad (\text{B.1})$$

sowie alternativ, mit der spezifischen Enthalpie im Advektionsteil ausgedrückt:

$$\frac{\partial(\varrho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho h \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla p + Q_e - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f e_l) - \varrho_l g W_f. \quad (\text{B.2})$$

Dabei sind die spezifische innere Energie

$$e = h - \frac{p}{\varrho} = (q_d c_{vd} + q_v c_{vv} + q_l c_{pl})T + q_v L_{00}, \quad (\text{B.3})$$

und die spezifische innere Energie für Flüssigwasser

$$e_l = h_l = c_{pl}T. \quad (\text{B.4})$$

Der Term Q_e ist mit dem Wasserdampfproduktionsterm verknüpft:

$$Q_e = h_v Q_v. \quad (\text{B.5})$$

Gl. (B.1) soll nun in eine Tendenzgleichung für die absolute Temperatur umgewandelt werden.

$$\begin{aligned} e \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \vec{v}) \right) + \varrho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla e \right) &= -p \nabla \cdot \vec{v} + h_v Q_v - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f e_l) - \varrho_l g W_f \\ e(Q_v - Q_{fall}) + \varrho \frac{de}{dt} &= -p \nabla \cdot \vec{v} + h_v Q_v - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f e_l) - \varrho_l g W_f \\ e(Q_v - Q_{fall}) + \frac{d(\varrho e)}{dt} - e \frac{d\varrho}{dt} &= -p \nabla \cdot \vec{v} + h_v Q_v - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f e_l) - \varrho_l g W_f \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\varrho e)}{dt} &= \frac{d}{dt} ([\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}]T + \varrho_v L_{00}) \\
 &= T \left(c_{vd} \frac{d\varrho_d}{dt} + c_{vv} \frac{d\varrho_v}{dt} + c_{pl} \frac{d\varrho_l}{dt} \right) + (\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}) \frac{dT}{dt} + L_{00} \frac{d\varrho_v}{dt} \\
 &= -(\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}) T \nabla \cdot \vec{v} + T c_{vv} (Q_v + Q_{ph}) - T c_{pl} (Q_{ph} + Q_{fall}) \\
 &\quad + (\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}) \frac{dT}{dt} - L_{00} (\varrho_v \nabla \cdot \vec{v} - Q_v - Q_{ph}) \\
 &= -e \varrho \nabla \cdot \vec{v} + (\varrho_d c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}) \frac{dT}{dt} + T (c_{vv} [Q_v + Q_{ph}] - c_{pl} [Q_{ph} + Q_{fall}]) \\
 &\quad + L_{00} (Q_v + Q_{ph}), \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

$$e \frac{d\varrho}{dt} = e (Q_v - Q_{fall}) - e \varrho \nabla \cdot \vec{v}. \tag{B.8}$$

Gleichungen (B.7) und (B.8) in (B.6):

$$\begin{aligned}
 \varrho_d c_{vml} \frac{dT}{dt} &= -T (c_{vv} [Q_v + Q_{ph}] - c_{pl} [Q_{ph} + Q_{fall}]) \\
 &\quad - L_{00} (Q_v + Q_{ph}) - p \nabla \cdot \vec{v} + Q_v h_v - Q_{e,fall} \\
 &= -p \nabla \cdot \vec{v} + (h_v - c_{vv} T - L_{00}) Q_v \\
 &\quad + (c_{pl} T - c_{vv} T - L_{00}) Q_{ph} - \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) - \varrho_l g W_f. \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

Umschreiben des Luftdrucks und Eliminieren der Geschwindigkeitsdivergenz:

$$-p \nabla \cdot \vec{v} = -(\varrho_d R_d + \varrho_v R_v) T \left(-\frac{1}{\varrho_d} \frac{d\varrho_d}{dt} \right) = (R_d + r_v R_v) T \frac{d\varrho_d}{dt}, \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varrho_d}{dt} &= \frac{1}{R_d T (1 + \frac{r_v}{\varepsilon})} \frac{dp}{dt} - \frac{p R_d T}{\varepsilon (R_d T [1 + \frac{r_v}{\varepsilon}])^2} \frac{dr_v}{dt} - \frac{p}{R_d T^2 (1 + \frac{r_v}{\varepsilon})} \frac{dT}{dt} \\
 &= \frac{\varrho_d}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{\varrho_d}{\varepsilon + r_v} \frac{dr_v}{dt} - \frac{\varrho_d}{T} \frac{dT}{dt} \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow -p \nabla \cdot \vec{v} &= \frac{dp}{dt} - R_v T \frac{dr_v}{dt} - \varrho_d R_d + \varrho_v R_v \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} - R_v T (Q_v + Q_{ph}) \\
 &\quad - (\varrho_d R_d + \varrho_v R_v) \frac{dT}{dt}, \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varrho_d (c_{vml} + R_m) \frac{dT}{dt} &= \varrho_d c_{pml} \frac{dT}{dt} \\
 &= \frac{dp}{dt} - R_v T (Q_v + Q_{ph}) + (h_v - c_{vv} T - L_{00}) Q_v \\
 &\quad + (c_{pl} T - c_{vv} T - L_{00}) Q_{ph} - \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) - \varrho_l g W_f. \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

Der Vorfaktor des Wasserdampfproduktionsterms verschwindet:

$$(h_v - c_{vv}T - L_{00} - R_vT)Q_v = (c_{pv}T + L_{00} - c_{vv}T - L_{00} - R_vT)Q_v = 0, \quad (\text{B.14})$$

da $c_{pv} - c_{vv} = R_v$. Mit $L_v = L_{00} + (c_{pv} - c_{pl})T$ folgt außerdem:

$$(c_{pl}T - c_{vv}T - R_vT - L_{00})Q_{ph} = (c_{pl}T - c_{vv}T - R_vT - L_v + (c_{pv} - c_{pl})T)Q_{ph} = -L_vQ_{ph}. \quad (\text{B.15})$$

Arrangieren der Terme liefert die Tendenzgleichung für die absolute Temperatur:

$$\varrho_d c_{pml} \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} - L_v Q_{ph} - \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_{fe}) - \varrho_l W_{fg}. \quad (\text{B.16})$$

Die logarithmische Ableitung ist dann

$$\frac{d \ln T}{dT} = \frac{R_m}{c_{pml}} \frac{d \ln p}{dt} - \frac{L_v}{\varrho_d c_{pml} T} Q_{ph} - \frac{1}{\varrho_d c_{pml} T} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_{fe}) - \frac{\varrho_l W_{fg}}{\varrho_d c_{pml} T}. \quad (\text{B.17})$$

Im Folgenden soll eine prognostische Gleichung für die feuchte potentielle Temperatur hergeleitet werden, da diese für die Tendenzgleichung der verallgemeinerten virtuellen potentiellen Temperatur benötigt wird. Größen, in denen die Feuchte und Flüssigwasser eingehen, werden mit einer Tilde gekennzeichnet, um sie von den trockenen Größen (z.B. trockene potentielle Temperatur θ) zu unterscheiden.

Die feuchte potentielle Temperatur schreibt sich als

$$\tilde{\theta} = \frac{T}{\tilde{\pi}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\pi} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R_m}{c_{pml}}} \quad (\text{B.18})$$

Logarithmieren des feuchten Exnerdruckes liefert

$$\ln \tilde{\pi} = \frac{R_m}{c_{pml}} \ln \left(\frac{p}{p_0} \right). \quad (\text{B.19})$$

Dabei definieren wir

$$R_m \equiv R_d + r_v R_v \quad \text{und} \quad (\text{B.20})$$

$$c_{pml} \equiv c_{pd} + r_v c_{pv} + r_l c_{pl}. \quad (\text{B.21})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \tilde{\pi}}{dt} &= \frac{R_v}{R_m} \ln \tilde{\pi} \frac{dr_v}{dt} - \frac{\ln \tilde{\pi}}{c_{pml}} \left(c_{pv} \frac{dr_v}{dt} + c_{pl} \frac{dr_l}{dt} \right) + \frac{R_m}{c_{pml}} \frac{d \ln p}{dt} \\ &= \frac{R_v}{R_m} \ln \tilde{\pi} \frac{Q_v + Q_{ph}}{\varrho_d} - \ln \tilde{\pi} \left(\frac{c_{pv}}{c_{pml}} \frac{Q_v + Q_{ph}}{\varrho_d} - \frac{c_{pl}}{c_{pml}} \frac{Q_v + Q_{fall}}{\varrho_d} \right) + \frac{R_m}{c_{pml}} \frac{d \ln p}{dt} \\ &= \ln \tilde{\pi} \left(\left[\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right] (Q_v + Q_{ph}) + \frac{c_{pl}}{c_{pml}} (Q_{ph} + Q_{fall}) \right) + \frac{R_m}{c_{pml}} \frac{d \ln p}{dt} \\ &= \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} \left(\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right) Q_v + \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} \frac{c_{pl} - c_{pv}}{c_{pml}} Q_{ph} + \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} \frac{c_{pl}}{c_{pml}} Q_{fall} + \frac{R_m}{c_{pml}} \frac{d \ln p}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

und für die feuchte potentielle Temperatur:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \ln \tilde{\theta}}{dt} &= \frac{d \ln T}{dt} - \frac{d \ln \tilde{\pi}}{dt} \\
 &= \frac{R_m}{c_{pml}} \frac{d \ln p}{dt} - \frac{L_v}{\varrho_d c_{pml} T} Q_{ph} - \frac{1}{\varrho_d c_{pml}} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) - \frac{\varrho_l g W_f}{\varrho_d c_{pml}} \\
 &\quad - \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} \left(\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right) Q_v - \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} \frac{c_{pl} - c_{pv}}{c_{pml}} Q_{ph} - \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} \frac{c_{pl}}{c_{pml}} Q_{fall} - \frac{R_m}{c_{pml}} \frac{d \ln p}{dt} \\
 &= - \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} \left(\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right) Q_v - \frac{1}{\varrho_d} \left(\ln \tilde{\pi} \frac{c_{pl} - c_{pv}}{c_{pml}} + \frac{L_v}{c_{pml} T} \right) Q_{ph} \\
 &\quad - \frac{c_{pl}}{c_{pml}} \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} Q_{fall} - \frac{1}{\varrho_d c_{pml}} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) - \frac{\varrho_l g W_f}{\varrho_d c_{pml}}. \tag{B.23}
 \end{aligned}$$

B.2 Verallgemeinerte virtuelle potentielle Temperatur

Ausgehend von der Definition der verallgemeinerten virtuellen potentiellen Temperatur

$$\theta_\varrho = \tilde{\theta} \frac{1 + r_v/\epsilon}{1 + r_v + r_l}, \tag{B.24}$$

ergibt sich ihre Tendenzgleichung durch Anwendung der Produktregel:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta_\varrho}{dt} &= \frac{1 + r_v/\epsilon}{1 + r_v + r_l} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} + \frac{\tilde{\theta}}{1 + r_v + r_l} \frac{1}{\epsilon} \frac{dr_v}{dt} - \tilde{\theta} \frac{1 + r_v/\epsilon}{(1 + r_v + r_l)^2} \left(\frac{dr_v}{dt} + \frac{dr_l}{dt} \right) \\
 &= \frac{\theta_\varrho}{\tilde{\theta}} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} + \theta_\varrho \left(\frac{1}{\epsilon + r_v} - \frac{1}{1 + r_v + r_l} \right) \frac{dr_v}{dt} - \frac{\theta_\varrho}{1 + r_v + r_l} \frac{dr_l}{dt} \tag{B.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{d \ln \theta_\varrho}{dt} &= \frac{d \ln \tilde{\theta}}{dt} + \left(\frac{1}{\epsilon + r_v} - \frac{1}{1 + r_v + r_l} \right) \frac{dr_v}{dt} - \frac{1}{1 + r_v + r_l} \frac{dr_l}{dt} \\
 &= - \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} \left(\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right) Q_v - \frac{1}{\varrho_d} \left(\ln \tilde{\pi} \frac{c_{pl} - c_{pv}}{c_{pml}} + \frac{L_v}{c_{pml} T} \right) Q_{ph} \\
 &\quad - \frac{c_{pl}}{c_{pml}} \frac{\ln \tilde{\pi}}{\varrho_d} Q_{fall} - \frac{1}{\varrho_d c_{pml}} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) - \frac{\varrho_l g W_f}{\varrho_d c_{pml}} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{\epsilon + r_v} - \frac{1}{1 + r_v + r_l} \right) \frac{Q_v + Q_{ph}}{\varrho_d} + \frac{1}{1 + r_v + r_l} \frac{Q_{ph} + Q_{fall}}{\varrho_d} \tag{B.26}
 \end{aligned}$$

Sortieren nach den Quelltermen und Beachten der Beziehung

$$\frac{1}{\epsilon + r_v} = \frac{1}{\frac{R_d}{R_v} + r_v} = \frac{R_v}{R_d + r_v R_v} = \frac{R_v}{R_m} \tag{B.27}$$

liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_\varrho}{dt} &= \frac{\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\frac{R_v}{R_m} - \frac{\varrho_d}{\varrho} - \ln \tilde{\pi} \left[\frac{R_v}{R_m} - \frac{c_{pv}}{c_{pml}} \right] \right) Q_v \\
&\quad - \frac{\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\ln \tilde{\pi} \frac{c_{pl} - c_{pv}}{c_{pml}} + \frac{L_v}{c_{pml}T} - \frac{R_v}{R_m} \right) Q_{ph} \\
&\quad + \frac{\theta_\varrho}{\varrho_d} \left(\frac{c_{pl}}{c_{pml}} [1 - \ln \tilde{\pi}] + \frac{\varrho_d}{\varrho} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f) \\
&\quad - \frac{\theta_\varrho}{\varrho_d c_{pml} T} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) - \theta_\varrho \frac{\varrho_l W_f g}{\varrho_d c_{pml} T}. \tag{B.28}
\end{aligned}$$

B.3 Äquivalentpotentielle Temperatur

Die äquivalentpotentielle Temperatur (*equivalent potential temperature*) lautet nach Emanuel [1994]:

$$\theta_e = T \left(\frac{p_0}{p_d} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} \mathcal{H}^{-\frac{r_v R_v}{c_p}} \exp \left(\frac{L_v r_v}{c_p T} \right). \tag{B.29}$$

$c_p = c_{pd} + r_t c_{pl}$ ist hierbei die effektive Wärmekapazität und $\mathcal{H} = \frac{p_v}{e_s(T)}$ die relative Luftfeuchtigkeit. Logarithmieren:

$$\ln \theta_e = \ln T + \frac{R_d}{c_p} (\ln p_0 - \ln p_d) - \frac{r_v R_v}{c_p} \ln \mathcal{H} + \left(\frac{L_v r_v}{c_p T} \right). \tag{B.30}$$

Umschreiben des Partialdrucks für trockene Luft:

$$p \stackrel{(2.7)}{=} p_d \left(1 + \frac{r_v}{\varepsilon} \right) \Rightarrow p_d = \frac{p}{1 + \frac{r_v}{\varepsilon}} \Rightarrow \ln p_d = \ln p - \ln \left(1 + \frac{r_v}{\varepsilon} \right). \tag{B.31}$$

(B.31) in (B.30) und $\frac{d}{dt}$ (B.30):

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln \theta_e}{dt} &= \frac{d \ln T}{dt} + \left(\ln p_0 - \ln p + \ln \left[1 + \frac{r_v}{\varepsilon} \right] \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{R_d}{c_p} \right) \\
&\quad + \frac{R_d}{c_p} \frac{d}{dt} \left(-\ln p + \ln \left[1 + \frac{r_v}{\varepsilon} \right] \right) - \ln \mathcal{H} \frac{d}{dt} \left(\frac{r_v R_v}{c_p} \right) \\
&\quad - \frac{r_v R_v}{c_p} \frac{d \ln \mathcal{H}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{L_v r_v}{c_p T} \right). \tag{B.32}
\end{aligned}$$

Berechnung der zeitlichen Ableitungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R_d}{c_p} \right) = -R_d \frac{c_{pl}}{c_p^2} \frac{dr_t}{dt} \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{d}{dt} \left(-\ln p + \ln \left[1 + \frac{r_v}{\varepsilon} \right] \right) = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{1 + \frac{r_v}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{dr_v}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\varepsilon + r_v} \frac{dr_v}{dt} \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r_v R_v}{c_p} \right) = \frac{R_v}{c_p} \frac{dr_v}{dt} - r_v R_v \frac{c_{pl}}{c_p^2} \frac{dr_t}{dt} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \mathcal{H}}{dt} &= \frac{d \ln p_v}{dt} - \frac{d \ln e_s(T)}{dt} \\ &= \frac{d \ln p}{dt} + \left(\frac{1}{r_v} - \frac{1}{\varepsilon + r_v} \right) \frac{dr_v}{dt} - \frac{L_v}{R_v T^2} \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{L_v r_v}{c_p T} \right) &= \frac{r_v}{c_p T} \underbrace{\frac{dL_v}{dt}}_{=(c_{pv} - c_{pl}) \frac{dT}{dt}} + \frac{L_v}{c_p T} \frac{dr_v}{dt} - \frac{L_v r_v}{c_p T^2} \frac{dT}{dt} - \frac{L_v r_v c_{pl}}{c_p^2 T} \frac{dr_t}{dt} \\ &= \left(\frac{r_v (c_{pv} - c_{pl})}{c_p} - \frac{L_v r_v}{c_p T} \right) \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{L_v}{c_p T} \frac{dr_v}{dt} - \frac{L_v r_v c_{pl}}{c_p^2 T} \frac{dr_t}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Für die relative Feuchte wurden die Beziehungen

$$p_v = p_d \frac{r_v}{\varepsilon} = \frac{p r_v}{\varepsilon + r_v} \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{d \ln p_v}{dt} = \frac{d \ln p}{dt} + \frac{d \ln r_v}{dt} - \frac{d \ln (\varepsilon + r_v)}{dt} = \frac{d \ln p}{dt} + \frac{d \ln r_v}{dt} - \frac{1}{\varepsilon + r_v} \frac{dr_v}{dt} \quad (\text{B.39})$$

und die Clausius-Clapeyron-Gleichung benutzt:

$$\frac{d \ln e_s(T)}{dt} = \frac{L_v}{R_v T^2} \frac{dT}{dt} \quad (\text{B.40})$$

(B.33), (B.34), (B.35), (B.36) und (B.37) in (B.32):

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \theta_e}{dt} &= \frac{d \ln T}{dt} + \ln \left(\frac{p_0}{p_d} \right) \left(-R_d \frac{c_{pl}}{c_p^2} \frac{dr_t}{dt} \right) \\ &+ \frac{R_d}{c_p} \left(-\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\varepsilon + r_v} \frac{dr_v}{dt} \right) - \ln \mathcal{H} \left(\frac{R_v}{c_p} \frac{dr_v}{dt} - r_v R_v \frac{c_{pl}}{c_p^2} \frac{dr_t}{dt} \right) \\ &- \frac{r_v R_v}{c_p} \left(\frac{d \ln p}{dt} + \left(\frac{1}{r_v} - \frac{1}{\varepsilon + r_v} \right) \frac{dr_v}{dt} - \frac{L_v}{R_v T^2} \frac{dT}{dt} \right) \\ &+ \left(\frac{r_v (c_{pv} - c_{pl})}{c_p} - \frac{L_v r_v}{c_p T} \right) \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{L_v}{c_p T} \frac{dr_v}{dt} - \frac{L_v r_v c_{pl}}{c_p^2 T} \frac{dr_t}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Sortieren nach den Quelltermen:

$$\begin{aligned}
c_p \frac{d \ln \theta_e}{dt} &= c_{pml} \frac{d \ln T}{dt} - \frac{R_d + r_v R_v}{p} \frac{dp}{dt} \\
&+ \left(-R_d \frac{c_{pl}}{c_p} \ln \frac{p_0}{p_d} + r_v R_v \frac{c_{pl}}{c_p} \ln \mathcal{H} - \frac{r_v L_v c_{pl}}{c_p T} \right) \frac{dr_t}{dt} \\
&+ \left(\frac{R_d}{\varepsilon + r_v} - R_v \ln \mathcal{H} - R_v + \frac{r_v R_v}{\varepsilon + r_v} + \frac{L_v}{T} \right) \frac{dr_v}{dt}, \tag{B.42}
\end{aligned}$$

mit

$$c_p + r_v(c_{pv} - c_{pl}) = c_{pd} + r_v c_{pv} + r_l c_{pl} = c_{pml}. \tag{B.43}$$

Außerdem ist $\frac{R_d}{\varepsilon + r_v} + \frac{r_v R_v}{\varepsilon + r_v} = \frac{R_d(1 + \frac{r_v}{\varepsilon})}{\varepsilon + r_v} = R_v$ und damit

$$\begin{aligned}
\frac{c_p}{\theta_e} \frac{d\theta_e}{dt} &= \frac{c_{pml}}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R_m}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\varrho_d} \left(\frac{L_v}{T} - R_v \ln \mathcal{H} \right) (Q_v + Q_{ph}) \\
&- \frac{1}{\varrho_d} \frac{c_{pl}}{c_p} \left(R_d \ln \frac{p_0}{p_d} - r_v R_v \ln \mathcal{H} + \frac{r_v L_v}{T} \right) (Q_v - Q_{fall}) \\
&= \frac{c_{pml}}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R_m}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\varrho_d} \left(\frac{L_v}{T} - R_v \ln \mathcal{H} \right) Q_{ph} \\
&+ \frac{1}{\varrho_d} \frac{c_{pl}}{c_p} \left(R_d \ln \frac{p_0}{p_d} - r_v R_v \ln \mathcal{H} + \frac{r_v L_v}{T} \right) Q_{fall} \\
&+ \frac{1}{\varrho_d} \left(\frac{L_v}{T} - R_v \ln \mathcal{H} - \frac{c_{pl}}{c_p} \left[R_d \ln \frac{p_0}{p_d} - r_v R_v \ln \mathcal{H} + \frac{r_v L_v}{T} \right] \right) Q_v. \tag{B.44}
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen von Temperaturtendenzgleichung (B.17) in Gleichung (B.44) erhält man den Quellterm der äquivalentpotentiellen Temperatur:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_e}{dt} &= - \frac{\theta_e}{\varrho_d c_p} R_v \ln \mathcal{H} Q_{ph} \\
&+ \frac{\theta_e}{\varrho_d c_p} \left(\frac{L_v}{T} - R_v \ln \mathcal{H} - \frac{c_{pl}}{c_p} \left[R_d \ln \left(\frac{p_0}{p_d} \right) + r_v R_v \ln \mathcal{H} + \frac{r_v L_v}{T} \right] \right) Q_v \\
&+ \frac{\theta_e}{\varrho_d c_p} \frac{c_{pl}}{c_p} \left(R_d \ln \left[\frac{p_0}{p_d} \right] - r_v R_v \ln \mathcal{H} + \frac{r_v L_v}{T} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f) \\
&- \frac{\theta_e}{\varrho_d c_p} \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_l W_f e_l) - \frac{\theta_e \varrho_l g W_f}{\varrho_d c_p}. \tag{B.45}
\end{aligned}$$

B.4 Energie

Die Gesamtenergie ist die Summe aus innerer, potentieller und kinetischer Energie.

$$E = \varrho(e + \phi + K) \tag{B.46}$$

mit

$$e = (q_d c_{vd} + q_v c_{vv} + q_l c_{pl})T + q_v L_{00}, \quad (\text{B.47})$$

$$\phi = gz, \quad (\text{B.48})$$

$$K = \frac{\vec{v}^2}{2}. \quad (\text{B.49})$$

Für all diese Energieformen gilt es, eine Tendenzgleichung in Flussform zu formulieren, welche schließlich die Gleichung für die Gesamtenergie bilden.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\vec{v}) = \frac{\partial(\varrho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho e\vec{v}) + \frac{\partial(\varrho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho\phi\vec{v}) + \frac{\partial(\varrho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho K\vec{v}) \quad (\text{B.50})$$

Dabei ist, ausgehend von Gleichung (B.1)

$$\frac{\partial(\varrho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho e\vec{v}) = -p\nabla \cdot \vec{v} + h_v Q_v - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f e_l) - \varrho_l g W_f. \quad (\text{B.51})$$

Für die potentielle Energiegleichung benutzt man die Kontinuitätsgleichung für die Gesamtdichte sowie die einfache Beziehung $\varrho \frac{d\phi}{dt} = \varrho g w$.

$$\frac{\partial(\varrho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho\phi\vec{v}) = \varrho g w + \varrho_l g W_f + \phi Q_v - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f \phi). \quad (\text{B.52})$$

Schließlich ergibt sich für die kinetische Energiegleichung unter Einbeziehung der Bewegungsgleichung (4.2):

$$\frac{\partial(\varrho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho K\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \nabla p - \varrho g w + K Q_v - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f K). \quad (\text{B.53})$$

Die Summer der Gleichungen (B.51), (B.52) und (B.53) ergibt die totale Energiegleichung:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\vec{v}) = -\nabla \cdot (p\vec{v}) + (h_v + \phi + K)Q_v - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho_l W_f [e_l + \phi + K]). \quad (\text{B.54})$$

B.5 Luftdruck

Wir drücken den Luftdruck als eine Funktion der Gesamtdichte, den Partialdichten für Wasserdampf und Flüssigwasser sowie der inneren Energie aus und bilden dessen materielle Ableitung

$$p = p(\varrho, e, \varrho_v, \varrho_l), \quad (\text{B.55})$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \frac{d\varrho}{dt} + \frac{\partial p}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \varrho_v} \frac{d\varrho_v}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \varrho_l} \frac{d\varrho_l}{dt}. \quad (\text{B.56})$$

Die Kontinuitätsgleichungen wurden in Kapitel 4 vorgestellt und seien hier noch einmal zusammengefasst:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} + Q_v - Q_{fall}, \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{d\rho_v}{dt} = -\rho_v \nabla \cdot \vec{v} + Q_v + Q_{ph}, \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{d\rho_l}{dt} = -\rho_l \nabla \cdot \vec{v} - Q_{ph} - Q_{fall}. \quad (\text{B.59})$$

Als Gleichung für die innere Energie muss Gl. (B.1) so modifiziert werden, dass man eine advective Form erhält; siehe dazu auch Fedkiw u. a. [2000].

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{v} + \frac{h_v}{\rho} Q_v - \frac{e}{\rho} (Q_v - Q_{fall}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_l W_f e_l) - q_l g W_f \\ &= -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho} (h_v - e) Q_v + \frac{e}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_l W_f) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_l W_f e_l) - q_l g W_f. \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Setzt man nun die Gln. (B.57), (B.60), (B.58) und (B.59) in Gl. (B.56) ein, so erhält man als prognostische Druckgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \left(-\rho \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} - \rho_v \frac{\partial p}{\partial \rho_v} - \rho_l \frac{\partial p}{\partial \rho_l} \right) \nabla \cdot \vec{v} \\ &+ \frac{\partial p}{\partial \rho} (Q_v - Q_{fall}) + \frac{\partial p}{\partial e} \left(\frac{1}{\rho} (h_v - e) Q_v + \frac{e}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_l W_f) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_l W_f e_l) - q_l g W_f \right) \\ &+ \frac{\partial p}{\partial \rho_v} (Q_v + Q_{ph}) + \frac{\partial p}{\partial \rho_l} (-Q_{ph} - Q_{fall}), \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

wobei der Vorfaktor der Geschwindigkeitsdivergenz gerade dem Produkt aus der Gesamtdichte und dem Quadrat der Schallgeschwindigkeit c entspricht. Dementsprechend ist

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial e} + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho_v} + \frac{\rho_l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho_l}}. \quad (\text{B.62})$$

Dies ergibt, sortiert nach den Quelltermen:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\rho c^2 \nabla \cdot \vec{v} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{h_v - e}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} + \frac{\partial p}{\partial \rho_v} \right) Q_v + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_v} - \frac{\partial p}{\partial \rho_l} \right) Q_{ph} \\ &+ \left(-\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{e}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} - \frac{\partial p}{\partial \rho_l} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\rho_l W_f) - \frac{\partial p}{\partial e} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_l W_f e_l) - q_l g W_f \frac{\partial p}{\partial e}, \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

mit der Zustandsgleichung

$$p(\rho, e, \rho_v, \rho_l) = \frac{(\rho - \rho_v - \rho_l) R_d + \rho_v R_v}{(\rho - \rho_v - \rho_l) c_{vd} + \rho_v c_{vv} + \rho_l c_{pl}} (\rho e - \rho_v L_{00}). \quad (\text{B.64})$$

Differentiation von Gleichung (B.64) nach ϱ , e , ϱ_v und ϱ_l unter Beachtung von Produkt- und Kettenregel führt zu den für die Druckgleichung (B.63) benötigten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \varrho} = & R_d \frac{\varrho e - \varrho_v L_{00}}{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}} \\ & - c_{vd} (\varrho e - \varrho_v L_{00}) \frac{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) R_d + \varrho_v R_v}{([\varrho - \varrho_v - \varrho_l] c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl})^2} \\ & + \frac{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) R_d + \varrho_v R_v}{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}} e \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{\partial p}{\partial e} = \frac{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) R_d + \varrho_v R_v}{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}} \varrho \quad (\text{B.66})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \varrho_v} = & (R_v - R_d) \frac{\varrho e - \varrho_v L_{00}}{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}} \\ & - L_{00} \frac{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) R_d + \varrho_v R_v}{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}} \\ & - (c_{vv} - c_{vd}) (\varrho e - \varrho_v L_{00}) \frac{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) R_d + \varrho_v R_v}{([\varrho - \varrho_v - \varrho_l] c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl})^2} \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \varrho_l} = & - R_d \frac{\varrho e - \varrho_v L_{00}}{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl}} \\ & - (c_{pl} - c_{vd}) (\varrho e - \varrho_v L_{00}) \frac{(\varrho - \varrho_v - \varrho_l) R_d + \varrho_v R_v}{([\varrho - \varrho_v - \varrho_l] c_{vd} + \varrho_v c_{vv} + \varrho_l c_{pl})^2} \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Literaturverzeichnis

- [Baldauf u. a. 2010] BALDAUF, M. ; FÖRSTNER, J. ; KLINK, S. ; REINHARDT, T. ; SCHRAFF, C. ; SEIFERT, K. A. und S. A. und Stephan: *Kurze Beschreibung des Lokal-Modells Kürzestfrist COSMO-DE (LMK) und seiner Datenbanken auf dem Datenserver des DWD*. Deutscher Wetterdienst (DWD), 2010
- [Bannon 2002] BANNON, P.R.: Theoretical Foundations for Models of Moist Convection. In: *American Meteorological Society* 59 (2002), S. 1967–1982
- [Bott 2008] BOTT, A.: Theoretical considerations on the mass and energy consistent treatment of precipitation in cloudy atmospheres. In: *Atmospheric Research* 89 (2008), S. 262–269
- [Bryan u. Fritsch 2002] BRYAN, G.H. ; FRITSCH, J.M.: A Benchmark Simulation for Moist Nonhydrostatic Numerical Models. In: *Monthly Weather Review* 130 (2002), dec, S. 2917–2928
- [Emanuel 1994] EMANUEL, K.A.: *Atmospheric Convection*. Oxford University Press, 1994
- [Etling 2008] ETLING, D.: *Theoretische Meteorologie*. Bd. 3., erw. und aktualisierte Aufl. Springer, 2008. – 376 S.
- [Fedkiw u. a. 2000] FEDKIW, R.P. ; LIU, X. ; OSHER, S.: *A General Technique for Eliminating Spurious Oscillations in Conservative Schemes for Multiphase and Multispecies Euler Equations*. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.24.2278>.
Version: 2000
- [Frisius u. Wacker 2007] FRISIUS, Th. ; WACKER, U.: Das massenkonsistente axialsymmetrische Wolkenmodell HURMOD. In: *Arbeitsergebnisse des DWD* 85 (2007), S. 1–42
- [Knoth 2006] KNOTH, Oswald: Compressible atmospheric modeling at all scales. In: *Report No. 39/2006*. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2006

- [Kong u. a. 2007] KONG, L. ; TUNCEL, L. ; XIU, N.: Fischer-Burmeister Complementarity Function on Euclidean Jordan Algebra. In: *Research Report CORR 2007-17* (2007). – Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada
- [Kwatra u. a. 2009] KWATRA, N. ; SU, J. ; GRÉTARSSON, J.T. ; FEDKIW, R.: A method for avoiding the acoustic time step restriction in compressible flow. In: *Journal of Computational Physics* (2009)
- [Lanser u. a. 2001] LANSER, D. ; BLOM, J.G. ; VERWER, J.G.: Time Integration of the Shallow Water Equations in Spherical Geometry. In: *Journal of Computational Physics* 171 (2001), S. 373–393
- [Reisner u. a. 2005] REISNER, J.M. ; MOUSSEAU, V.A. ; WYSZOGRODZKI, A.A. ; KNOLL, D.A.: An Implicitly Balanced Hurricane Model with Physics-Bases Preconditioning. In: *American Meteorological Society* 133 (2005), S. 1003–1022
- [Satoh 2003] SATOH, M.: Conservative Scheme for a Compressible Nonhydrostatic Model with Moist Processes. In: *Monthly Weather Review* 131 (2003), S. 1033–1050
- [Satoh u. a. 2008] SATOH, M. ; MATSUNO, T. ; TOMITA, H. ; MIURA, H. ; NAKAMOTO, T. ; IGA, S.: Nonhydrostatic icosahedral atmospheric model (NICAM) for global cloud resolving simulations. In: *Journal of Computational Physics* 227 (2008), S. 3486–3514
- [Schnaidt 1944] SCHNAIDT, F.: Über die adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft, die abgeleiteten Temperaturen und den Energievorrat atmosphärischer Schichtungen. In: *Gerlands Beiträge zur Geophysik* 60 (1944), S. 16–138
- [Sebah u. Gourdon 2001] SEBAH, P. ; GOURDON, X.: *Newton's method and high order iterations*. <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/newton.ps>. Version: 2001
- [Skamarock u. a. 2008] SKAMAROCK, W.C. ; KLEMP, J.B. ; DUDHIA, J. ; GILL, D.O. ; BARKER, D.M. ; DUDA, M.G. ; HUANG, X. ; WANG, W. ; POWERS, J.G.: *A Description of the Advanced Research WRF Version 3*. National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, USA: Mesoscale and Microscale Meteorology Division, 2008

- [Thuburn 2008] THUBURN, J.: Some conservation issues for the dynamical cores of NWP and climate models. In: *Journal of Computational Physics* 227 (2008), S. 3715–3730

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderweitigen fremden Äußerungen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit noch nicht in einem anderen Studiengang als Prüfungsleistung verwendet wurde.

Ich bin einverstanden, dass die Arbeit nach positiver Begutachtung in der Universitätsbibliothek und der Bibliothek des Leibnitz-Instituts für Troposphärenforschung zur Verfügung steht.

Leipzig, den 30. März 2011