

## **Diplomarbeit**

Elmar Filaus



---

Diplomarbeit

**Reibungsbehaftete  
Überströmung  
quasi-zweidimensionaler  
Hindernisse**

Studiengang  
Meteorologie

Universität Leipzig  
Fakultät für Physik und Geowissenschaften  
Fachbereich Meteorologie  
&  
Leibniz-Institut für  
Troposphärenforschung\*

**Elmar Filaus**

Erstgutachter: Prof. Dr. Eberhardt Renner\*  
Zweitgutachter: Dr. Armin Raabe  
Betreuer: Dr. Oswald Knoth

Angefertigt in der Zeit vom 01. Dezember 2006 bis 30. November 2007

Leipzig, Dezember 2007

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theorie</b>	<b>5</b>
2.1. Grundlagen Schwerewellen . . . . .	5
2.2. Atmosphärische Schwerewellen . . . . .	7
2.3. Lineare Theorie . . . . .	11
2.3.1. Taylor-Goldstein-Gleichung . . . . .	12
2.3.2. Lösung der Taylor-Goldstein-Gleichung . . . . .	15
<b>3. Modellbeschreibung ASAM</b>	<b>25</b>
3.1. Erhaltungsgleichungen . . . . .	26
3.1.1. Favre-gemittelte Erhaltungsgleichungen . . . . .	27
3.2. Diskretisierung und Geometrie . . . . .	29
3.2.1. Gitterstruktur . . . . .	29
3.2.2. Cutcells . . . . .	30
3.2.3. Zeitdiskretisierung . . . . .	31
3.3. Strahlungsmodell . . . . .	33
3.4. Turbulenzmodell . . . . .	33
3.4.1. Turbulenzschema 0. Ordnung . . . . .	35
3.4.2. Turbulenzschema Subgrid Scale (SGS) . . . . .	36
3.4.3. Turbulenzschema $k - \epsilon$ . . . . .	39
3.4.4. Turbulenzschema $k - l$ . . . . .	42

---

3.5. Oberflächenparametrisierung . . . . .	46
3.5.1. Louis Schema . . . . .	46
<b>4. Modellrechnungen</b>	<b>51</b>
4.1. Neutrale Grenzschicht . . . . .	51
4.1.1. Vertikalprofil . . . . .	52
4.1.2. Turbulente Längenskala . . . . .	55
4.2. Agnesi-Berg . . . . .	56
4.2.1. Modellvergleich . . . . .	57
4.2.2. Turbulente Längenskala . . . . .	66
4.3. T-REX Kampagne . . . . .	70
<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>83</b>
<b>A. Appendix</b>	<b>87</b>
A.1. Boussinesq-Approximation . . . . .	87
A.2. Dirac-Delta-Funktion . . . . .	89
<b>Abkürzungs- und Symbolverzeichnis</b>	<b>93</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>101</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Wolkenform aufgrund einer gebirgs-induzierten Scherewelle im Owens Valley, Kalifornien (Photo von Jay Packer) . . . . .	2
2.1. Stromlinien konstanter Überströmung einer sinusförmigen Oberflächenstruktur mit $N = 0.01 \text{ s}^{-1}$ , $u_0 = 15 \text{ ms}^{-1}$ und einer Wellenlänge der Oberfläche a) 8 km ( $N/u_0 < k$ ) und b) 40 km ( $N/u_0 > k$ ). Die Strömung erfolgt von links nach rechts und die unterste Stromlinie repräsentiert die Oberfläche. (Durrán 2003) . . . . .	20
2.2. Funktion nach Agnesi . . . . .	22
3.1. Gittertypen: a) Arakawa A und b) Arakawa C . . . . .	29
3.2. Geometrie mit darüberliegendem kartesischen Gitter. Angeschnittene Gitterzelle (Cutcell) hervorgehoben. . . . .	31
3.3. Parametrische Funktionen $F_m$ und $F_h$ in Abhängigkeit der Bulk-Richardson Zahl $Ri$ . . . . .	38
4.1. Vertikalprofile einer neutral geschichteten Atmosphäre unter Verwendung unterschiedlicher Turbulenzschemata $k - \epsilon$ , $k - l$ und SGS, mit einer Schubspannungsgeschwindigkeit $u_* = 1 \text{ ms}^{-1}$ und einer Rauigkeitslänge $z_0 = 0.1 \text{ m}$ , sowie deren Verhältnis zu dem analytisch berechneten Vertikalprofil. . . . .	54
4.2. Vertikalprofil des horizontalen Windgeschwindigkeitsbetrages $u$ ( $\text{ms}^{-1}$ ) und des Diffusionskoeffizienten für Impuls $\nu_m$ ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) für unterschiedlich Skalierung der Längenskala $\Lambda$ mit 0.25; 0.50; 0.75; 1.00 und 1.25 . . . . .	55
4.3. Schematische Darstellung des Modellgebietes . . . . .	56

- 
- 4.4. Potentielle Temperatur  $\theta$  (K) simuliert mit COAMPS (Doyle und Durran 2002) nach 3 h (oben), mit ASAM nach 2 h (mitte) und WRF nach 3 h (unten). Als Bodenparametrisierung wurde für a), c) und e) *freelip* und für b), d) und f) *noslip* Bedingungen zu Grunde gelegt, mit einer maximalen Rauigkeitslänge  $z_0 = 0.1$  m für *noslip*. Die Isentropen für die Rechnungen mit COAMPS liegen 4 K auseinander. 60
- 4.5. Horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) simuliert mit COAMPS (Doyle und Durran 2002) nach 3 h (oben), mit ASAM nach 2 h (mitte) und mit WRF nach 3 h (unten). Als Bodenparametrisierung wurde für a), c) und e) *freelip* und für b), d) und f) *noslip* Bedingungen zu Grunde gelegt, mit einer maximalen Rauigkeitslänge  $z_0 = 0.1$  m für *noslip*. . . . . 62
- 4.6. Entwicklung des Windgeschwindigkeitsbetrages  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) im Lee des Agnesi-Berges mit einer Längenskala  $\Lambda \approx 80$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf bis  $t = 180$  min im Abstand von 15 min. . . . . 64
- 4.7. Entwicklung des Diffusionskoeffizienten für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) im Lee des Agnesi-Berges mit einer Längenskala  $\Lambda \approx 80$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf bis  $t = 180$  min im Abstand von 15 min. . . . . 65
- 4.8. Diffusionskoeffizient für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) und TKE  $k$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ) für die Überströmung des Agnesi-Berges unter *noslip* Bedingungen und mit unterschiedlicher Skalierung der Längenskala  $\Lambda$  mit 0.25, 1.00 und 1.25. Folgende turbulente Längenskala ergibt sich für a), b)  $\lambda \approx 20$  m; für c), d)  $\lambda \approx 80$  m und für e), f)  $\lambda \approx 100$  m. . . . . 68
- 4.9. Potentielle Temperatur  $\Theta$  (K) und die horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) für die Überströmung des Agnesi-Berges unter *noslip* Bedingungen und mit unterschiedlicher Skalierung der Längenskala  $\Lambda$  mit 0.25, 1.00 und 1.25. Folgende turbulente Längenskala ergibt sich für a), b)  $\lambda \approx 20$  m; für c), d)  $\lambda \approx 80$  m und für e), f)  $\lambda \approx 100$  m. 69
- 4.10. Schematische Darstellung der bodengestützten Messverfahren der T-REX Kampagne März/April 2006 im Owens Valley, Kalifornien; Quelle: [http://www.met.utah.edu/whiteman/T\\_REX/p6.html](http://www.met.utah.edu/whiteman/T_REX/p6.html) - Zugriffsdatum 29. November 2007 . . . . . 70



- 
- 4.11. Gemittelttes Vertikalprofil für horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  und potentielle Temperatur  $\theta$  basierend auf dem Radiosondenaufstieg vom 25. März 2006, 2100 UTC MGAUS und denen von Oakland vom 25. März 2006, 1200 UTC, sowie 26. März 2006, 0000 UTC. . . . . 71
- 4.12. Ausschnitt des W-O-Gebirgsprofils der Sierra Nevada und asymmetrischer Agnesi Berg (rot) mit einer Halbwertsbreite im Luv  $b = 40$  km und im Lee  $b = 5$  km. . . . . 72
- 4.13. W-O-Schnitt der Sierra Nevada, sowie eines 2500 m hohen asymmetrischen Agnesi-Berges mit einer Höhe  $H = 2500$  m und einer Halbwertsbreite im Luv  $b_{\text{Luv}} = 40$  km und im Lee  $b_{\text{Lee}} = 5$  km. Dargestellt sind die horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ), der Diffusionskoeffizient für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) und die Vertikalgeschwindigkeit  $w$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ) zur Zeit  $t = 240$  min für eine turbulente Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m. . . . 74
- 4.14. Entwicklung des Diffusionskoeffizienten für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) bei der Überströmung eines Gebirgsschnittes der Sierra Nevada mit einer turbulenten Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf im Abstand von 15 min bis zu einer Simulationszeit  $t = 240$  min. . . . 77
- 4.15. Entwicklung der horizontalen Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) bei der Überströmung eines Gebirgsschnittes der Sierra Nevada mit einer turbulenten Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf im Abstand von 15 min bis zu einer Simulationszeit  $t = 240$  min. . . . 78
- 4.16. Entwicklung der horizontalen Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) bei der Überströmung eines Gebirgsschnittes der Sierra Nevada mit einer turbulenten Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf im Abstand von 15 min bis zu einer Simulationszeit  $t = 240$  min. . . . 81



# Tabellenverzeichnis

3.1. Empirische Konstanten für das Lilly-Smagorinsky Modell nach Stevens u. a. (1999). . . . .	36
3.2. Empirische Konstanten für das Standard $k - \epsilon$ Modell nach Launder und Sharma (1974) . . . . .	40
3.3. Empirische Konstanten für das Turbulenzmodell nach Dickey und Mellor (1980) . . . . .	46

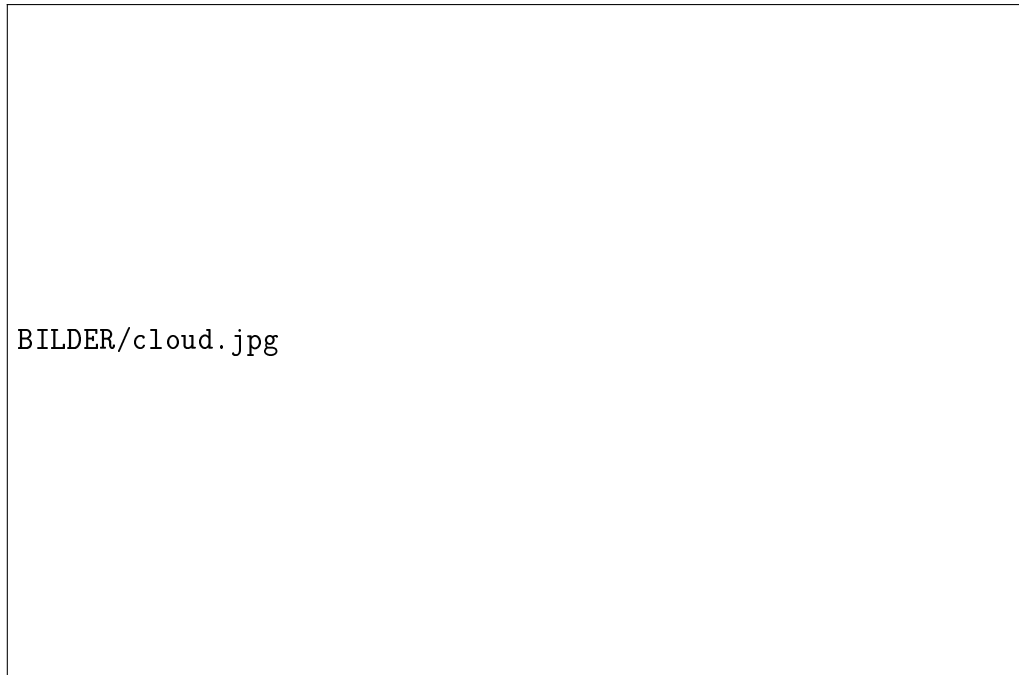


# 1. Einleitung

Häufig beobachtet man bei entsprechenden Feuchteverhältnissen und stabiler Luftschichtung im Lee eines Gebirges flache Wolken der Art *Alto cumulus lenticularis* oder sogenannte *rotor clouds* (siehe Abb. 1.1). Diese deuten auf das Vorhandensein von Schwerewellen und Rotoren hin. Für die allgemeine Luftfahrt in Form von Kleinflugzeugen, Seglern und Heißluftballons als auch für Großraumflugzeuge und Helikopter stellen solche Rotoren eine potentielle Gefahrenquelle dar. Auf- und Abwinde, sowie kleinere Verwirbelungen auf engstem Raum können zu einer Überbeanspruchung von Material und fliegerischem Könnens der Piloten führen. Die Folge sind die Beeinträchtigung der Flugfähigkeit bis hin zum Absturz. Aufgabe ist es, die Gefahr einer solchen atmosphärischen Situationen auf die Luftfahrt zu minimieren. Mit einem besseren Verständnis von Turbulenz und aussagefähigen numerischen Modellen wird es möglich sein, eine prognostische Aussage über die Entwicklung von Schwerewellen und Rotoren zu treffen.

Erstmalig entdeckt wurden Schwerewellen durch deutsche Segelflieger im Jahre 1933 im Bereich des Riesengebirges. Aufgrund des Entstehungsortes im Lee eines Gebirges, wird häufig der Begriff Leewelle verwendet. Eine erste mathematisch umfassende Beschreibung findet sich bei Queney (1948). Seitdem wurden weitere experimentelle wie auch theoretische Untersuchungen zu den Schwerewellen durchgeführt. Man fand dabei heraus, dass das Auftreten dieser Leewellen im wesentlichen durch zwei Parameter bestimmt wird: die thermische Schichtung der Atmosphäre und die ungestörte horizontale Windgeschwindigkeit stromauf des Hindernisses (Dörnbrack u. a. 2006). Die Welle entsteht hierbei, wenn ein Luftpaket durch eine Störung an

einem Strömungshindernis vertikal ausgelenkt wird. Bei einer vorherrschend stabil geschichteten Atmosphäre wirkt die Massenträgheit nun rücktreibend auf das ausgelenkte Luftteilchen. Das Luftpaket schwingt um seine Ausgangslage und erzeugt so im Lee des Hindernisses die charakteristische Form einer Welle, deren physikalische Eigenschaften (Reflexion, Brechung, Interferenz) bekannt sind.



**Abb. 1.1:** Wolkenform aufgrund einer gebirgs-induzierten Scherewelle im Owens Valley, Kalifornien (Photo von Jay Packer)

Man unterscheidet im wesentlichen zwei Arten von Schwerewellen:

- Externe Schwerewellen treten an der Grenzfläche zweier Medien unterschiedlicher Dichte auf, wobei das dichtere Medium unter dem weniger dichten liegt. Die Wellen breiten sich entlang der Grenzfläche aus.
- Interne Schwerewellen treten innerhalb eines kontinuierlich stabil geschichteten Mediums auf. Sie können sich beliebig im Raum ausbreiten.

Als wohl bekannteste Vertreter externer Wellen kennt man Wellen entlang der Meeresoberfläche. Aber auch eine Diskontinuität in der atmosphärischen Schichtung

kann Wellen hervorrufen, deren Erscheinungsbild einer stehenden Welle gleicht. Verantwortlich dafür ist eine Totalreflexion, die die externe Schwerewelle innerhalb der Schicht zwischen Boden und Grenzfläche gefangen hält, sodass sich diese nur noch horizontal ausbreiten kann. Interne Schwerewellen hingegen können auch in die Stratosphäre eindringen, wo deren Wellenamplituden dann häufig so groß werden, dass die Schichtung zwischen Wellenmaximum und Wellenminimum instabil wird. Die Wellen beginnen in kleinskalige Turbulenzen zu brechen und Impuls an die Umgebung abzugeben. Durch diesen Impuls- und Energietransport haben die Schwerewellen einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die großräumige Zirkulation in der Atmosphäre.

Weitere meteorologische Ereignisse im Zusammenhang mit Schwerewellen, sind z.B. die starken Hangwinde im Lee einer Gebirgsüberströmung, die Geschwindigkeiten bis zu  $150 \text{ km h}^{-1}$  erreichen können, wie im Jahr 1972 in den Rocky Mountains in Colorado (Lilly und Kennedy 1973; Lilly 1978). Ist die Anströmgeschwindigkeit senkrecht zum Hinderniss hinreichend groß, so können sich in der unteren Atmosphäre zudem Wirbel mit horizontalen Rotationsachsen parallel zu dem Gebirgskamm entwickeln. Solche Rotoren stehen in enger Beziehung zu den darüberliegenden Schwerewellen, können aber auch durch turbulente Ablöseprozesse in der Grenzschicht entstehen. Ein Verständnis dieses Systems Welle-Rotor ist Bestandteil aktueller wissenschaftlicher Forschungen (Doyle und Durran 2002, 2007; Durran 2003; Gatti-Bono und Colella 2006) und ist ebenso Hintergrund dieser Diplomarbeit sein.

Unter Verwendung und Modifizierung des am Leibniz-Institut für Troposphärenforschung in Leipzig entwickelten Strömungsmodells ASAM (All Scale Atmospheric Model) wird die Überströmung quasi-zweidimensionaler Hindernisse simuliert. Diese Hindernisse werden im wesentlichen durch einfache mathematische Funktionen approximiert, sodass grundlegende Verständnisfragen anhand dieser idealisierten Gebirgsüberströmung erörtert werden können. Mithilfe klassischer Modelle wie das vom Naval Research Laboratory entwickelte COAMPS (Coupled Ocean/Atmosphere Mesoscale Prediction System) und dem am National Center for Atmospheric Research entwickeltem WRF (Weather Research and Forecasting Model) wurden eben solche idealisierten Überströmungen, sowie die komplexerer Gebirgsstrukturen, simuliert (Doyle und Durran 2002, 2007; Rampanelli und Zardi 2004). Diese Modelle nutzen geländefolgende Koordinaten, deren Vorteil u.a. in einer genaueren Reproduzierung

einer Strömung nah entlang eines Gebirgszuges sein kann. Probleme ergeben sich jedoch in der Darstellung stabiler atmosphärischer Schichtungen, die von diesen Modellen nur annähernd wiedergegeben werden kann.

Dem Modell ASAM hingegen liegt ein kartesisches Gitter zu Grunde, was ebenso Vor- wie auch Nachteile in sich birgt. So muss die Gebirgsstruktur interpoliert werden. Eine besonders einfache, jedoch ebenso problembehaftete Approximation ist die eines Stufengebirges. Man approximiert das Gelände entsprechend seiner numerischen Gitterstruktur als Stufen. Simulationen mit derart diskretisierter Gebirgsstrukturen führten jedoch zu unbefriedigenden Ergebnissen im Vergleich zu den Modellen mit geländefolgenden Koordinaten (Gallus 2000). Eine Lösung hierfür ist die Verwendung der sogenannten *Cut Cells*-Methode. Die Gebirgsstruktur wird dabei mittels angeschnittener Zellen in das Modellgitter implementiert. Der Grad der Approximation erhöht sich dabei in Abhängigkeit zur Auflösung des kartesischen Gitters. Erste Ergebnisse mit solch einer Approximation im Bereich der Atmosphärenmodellierung findet man u.a. bei Gatti-Bono und Colella (2006) und Horn (2006). Im ASAM findet eben dieser Ansatz der Cut-Cell-Approximation Verwendung.

Im Folgenden gliedert sich meine Arbeit in drei größere Kapitel. Zum einen befasst sich Kapitel 1 mit den theoretischen Grundlagen von Schwerewellen. Der physikalische Hintergrund zur Entstehung von Schwerewellen wird ebenso betrachtet, wie die lineare Theorie zur mathematischen Beschreibung. Anschließend folgt ein Kapitel Strömungsmodell ASAM. Im Zuge der Beschreibung turbulenter Überströmungen wurden im Rahmen dieser Arbeit zwei neue Turbulenzschemen (Herzog u. a. 2002, 2003), sowie eine Parametrisierung des Austausches turbulenter Flüsse am Boden (Uno u. a. 1995) in das Modell implementiert. Mit diesen Parametrisierungen als Grundlage werden unterschiedliche Überströmungen verschiedener Hindernisstrukturen untersucht. Diese werden sowohl reibungsfrei wie auch reibungsbehaftet durchgeführt und den Ergebnissen anderer Modelle gegenübergestellt. Die Ergebnisse und Simulationsbeschreibungen werden schließlich im dritten Kapitel dargelegt, gefolgt von einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick auf weitere Themenschwerpunkte.



## 2. Theorie

### 2.1. Grundlagen Schwerewellen

Die Ausbreitung von Wellen ist an ein schwingungsfähiges Medium gebunden, so z.B. an den Ozean oder in unserem Fall an die Atmosphäre. Ausgehend von einer Quelle breitet sich die Schwingung über die Kopplung innerhalb des Mediums im Raum aus. Man kann dabei in ebene Wellen und Kugelwellen unterscheiden. Ebene Wellen können z.B. am Strand beobachtet werden, wobei sich diese nur in ihrer horizontalen Wellenlänge und ihrer Amplitude ändern. Kugelwellen hingegen breiten sich dreidimensional aus und können ihre Form in alle drei Raumrichtungen ändern. Auch das Medium kann in Bewegung sein, so dass eine Festlegung auf das zu betrachtende Bezugssystem notwendig ist. Ein Großteil atmosphärischer Messungen sind bodengestützt und werden an einem bestimmten Messort auf der Erde aufgenommen. Es bietet sich somit an, für die weitere Betrachtung das Euler-Bezugssystem zu verwenden. Um den Einfluss der Erdkrümmung vernachlässigen zu können, werden nur horizontale Wellenlängen  $\lambda \leq 1000$  km in Betracht gezogen. Horizontale Flächen werden als eben angenommen, sodass man in einem kartesischen Koordinatensystem mit den zugehörigen Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  ( $i = x, y, z$ ) die Wellenzahlen bezüglich der drei Raumrichtungen, wie folgt definiert:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_x} \qquad l = \frac{2\pi}{\lambda_y} \qquad m = \frac{2\pi}{\lambda_z} , \qquad (2.1)$$

mit den Wellenlängen in x-, y- bzw. z-Richtung  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  und  $\lambda_z$ . Die Ausbreitungsrichtung der Welle wird dann durch den Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  beschrieben:

$$\vec{k} = k\vec{e}_x + l\vec{e}_y + m\vec{e}_z . \quad (2.2)$$

Eine einzelne Oszillation der Welle, ob in Raum oder Zeit, entspricht einem Kreis mit  $2\pi$  Radian. Hat man nun die Periode  $\tau$  für eine vollständige Schwingung, so lautet die dazugehörige Kreisfrequenz  $\omega$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} . \quad (2.3)$$

Im folgenden wird sich der Einfachheit halber auf den zweidimensionalen Fall beschränkt, d.h es wird die Ausbreitung von Wellen in der x-z-Ebene betrachtet. Die Wellengleichung lautet dann:

$$f(x, z, t) = \text{Re } Ae^{i\phi} = A \cos(kx + mz - \omega t) . \quad (2.4)$$

Die Lage der Wellenphase in Raum und Zeit wird dabei durch den Phasenwinkel  $\phi$  in Polarkoordinaten beschrieben:

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = kx + mz - \omega t , \quad (2.5)$$

mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$ . Linien konstanter Phasenwinkel zu einer festen Zeit beschreiben die Orientierung der Wellenfronten im Raum. Die Gleichung für die Wellenfronten ist somit:

$$\phi(x, z) = kx + mz = \text{const} . \quad (2.6)$$

In Richtung der Wellenausbreitung bewegt sich eine konstante Phase mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  fort. Um diese zu erhalten, differenziert man (2.5) bei konstanter Phase nach der Zeit:

$$\left. \frac{d}{dt} \phi \right|_{\phi} = \vec{k} \cdot \frac{d}{dt} \vec{r} - \omega = 0 . \quad (2.7)$$

Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich aus der zeitlichen Ableitung des Betrages des Ortsvektors:

$$c = \frac{d}{dt} |\vec{r}| . \quad (2.8)$$

Definitionsgemäß ist die Phasengeschwindigkeit die Geschwindigkeit, mit der sich ein konstante Phase in Richtung der Wellenausbreitung bewegt.

$$c = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{d}{dt} |\vec{r}| = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \frac{d}{dt} |\vec{r}| . \quad (2.9)$$

Zusammen mit (2.7) erhält man für die Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{\omega}{|k|} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + m^2}} . \quad (2.10)$$

Schwerewellen können Energie und Impuls bis in die obere Atmosphäre hinein transportieren. Ausgehend von einer Quelle, was ein Hurrikane oder der Ausbruch eines Vulkans sein kann, muss die dabei freiwerdende Energie abtransportiert werden. Geschwindigkeit und Richtung dieses Energietransportes wird durch die Gruppengeschwindigkeit  $\vec{c}_g$  bestimmt. Der Begriff Gruppengeschwindigkeit impliziert, dass sich die Welle aus mehreren Elementarwellen zusammensetzt und somit als Wellenpaket zu verstehen ist. Mit dem Prinzip der Superposition erklärt man die Überlagerung vieler Elementarwellen. Dabei kann es abhängig von der Phasenbeziehung zu konstruktiver Interferenz (Verstärkung der Auslenkungen) oder aber zur destruktiven Interferenz (Auslöschung) kommen. Die Gruppengeschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit des Wellenpaketes

$$u_g = \frac{\partial}{\partial k} \omega \quad , \quad w_g = \frac{\partial}{\partial m} \omega . \quad (2.11)$$

Die Komponenten in x- bzw. z-Richtung sind mit  $u_g$  und  $w_g$  deklariert.

## 2.2. Atmosphärische Schwerewellen

Der Ausdruck Schwerewelle impliziert die Schwerkraft als die alleinige rücktreibende Kraft. Jedoch bei genauerer Betrachtung der Auslenkung eines Teilchens des Me-

diums aus seiner Gleichgewichtslage wird deutlich, dass vielmehr die Auftriebskraft des Mediums als die eigentlich Rücktriebskraft gilt. Es wird angenommen, dass alle Prozesse adiabatisch und reibungsfrei verlaufen und es zu keiner Vermischung des Luftvolumens mit seiner Umgebungsluft kommt. Bei einer Auslenkung des Luftpakets um eine kleine Verschiebung  $\delta z$  aus seiner Ruhelage vertikal nach oben wirkt nun auf dessen Masse  $m_p$  die Schwerkraft rücktreibend. Das Luftvolumen wird vertikal nach unten beschleunigt, d.h. es strebt seinem Gleichgewichtszustand entgegen. Am Ausgangspunkt angekommen ist die gesamte zugeführte potentielle Energie des Luftpakets in kinetische Energie umgewandelt, sodass es sich über den Gleichgewichtszustand hinaus bewegt. Im Medium Luft wirkt die Auftriebskraft  $\vec{F}_\rho$  nun abbremmend. Sie ist vertikal positiv, d.h. nach oben, gerichtet und bildet nun die rücktreibende Kraft

$$\vec{F}_\rho = -g (m_p - m_a) \vec{e}_z , \quad (2.12)$$

wobei  $m_a$  die Masse der von dem Luftvolumen verdrängten Luft ist und  $g$  die Schwerkraftbeschleunigung darstellt. Aus dem Newton'schen Bewegungsgesetz erhält man für eine Auslenkung  $\delta z$  aus der Gleichgewichtslage:

$$m_p \frac{d^2}{dt^2} (\delta z) = -g (m_p - m_a) . \quad (2.13)$$

Das Volumen des Luftpakets soll dem durch sich selbst verdrängten Luftvolumen entsprechen. Des Weiteren wird angenommen, dass der Luftdruck  $p$  des Luftpakets gleich dem der Umgebungsluft ist. Die statische Grundgleichung für Luft wird durch das ideale Gasgesetz repräsentiert:

$$p = \rho R_s T , \quad (2.14)$$

mit der Temperatur  $T$  und der spezifischen Gaskonstante  $R_s$ . Für trockene Luft ist  $R_s = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Aus (2.14) mit (2.13) folgt

$$\frac{d^2}{dt^2} (\delta z) = -g \frac{\rho_p - \rho_a}{\rho_p} = -g \frac{T_a - T_p}{T_a} , \quad (2.15)$$

mit der Temperatur der Umgebungsluft  $T_a$  bzw. der des Luftvolumens  $T_p$ . Die Temperaturen werden nun einer Taylor-Reihen-Entwicklung bis zur ersten Ordnung unterzogen

$$T_a(z_e + \delta z) = T_0 + \left. \frac{\partial T_a}{\partial z} \right|_{z_e} \delta z + \dots \quad (2.16)$$

$$T_p(z_e + \delta z) = T_0 + \left. \frac{\partial T_p}{\partial z} \right|_{z_e} \delta z + \dots \quad (2.17)$$

mit der Temperatur  $T_0$  in der Gleichgewichtshöhe  $z_e$ . Unter der Annahme, dass die Änderung der Umgebungstemperatur bei vertikaler Auslenkung klein ist, also

$$T_0 \gg \left. \frac{\partial T_a}{\partial z} \right|_{z_e} \delta z, \quad (2.18)$$

folgt nach dem Einsetzen von (2.16) und (2.17) in (2.15) für die Beschleunigung der Auslenkung

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = -\frac{g}{T_a} \left( \left. \frac{\partial T_a}{\partial z} \right|_{z_e} T_a - \left. \frac{\partial T_p}{\partial z} \right|_{z_e} T_p \right) \delta z. \quad (2.19)$$

Man definiert den adiabatischen Temperaturgradienten  $\Gamma$

$$\Gamma = -\frac{\partial T_p}{\partial z} = \frac{g}{c_p}, \quad (2.20)$$

wobei  $c_p$  die spezifische Wärmekapazität von Luft bei konstantem Druck ist. Des Weiteren setzt man  $\partial T_a / \partial z = \gamma_a$ , den atmosphärischen Temperaturgradienten. Gleichung (2.19) schreibt sich nun

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = -\frac{g}{T_a} (\Gamma - \gamma_a) \delta z. \quad (2.21)$$

Als ein Maß für die Summe aus innerer Energie und potentieller Energie hat man die potentielle Temperatur  $\theta$  eingeführt. Diese Zustandsgröße entspricht derjenige

Temperatur, die ein Luftpaket annimmt, wenn man es von seiner vertikalen Höhe mit dem Druck  $p$  adiabatisch auf eine Höhe mit einem Druck von 1000 hPa bringt:

$$\theta = T_a \left( \frac{1000 \text{ hPa}}{p} \right)^{\frac{R_s}{c_p}} . \quad (2.22)$$

Unter Verwendung der logarithmischen Ableitung von (2.22) zusammen mit (2.14) und der hydrostatischen Approximation

$$\frac{\partial}{\partial z} p = -\rho g , \quad (2.23)$$

erhält man

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial z} \theta = \frac{1}{T_a} \left( \frac{\partial}{\partial z} T_a + \frac{g}{c_p} \right) = \frac{\Gamma - \gamma_a}{T_a} . \quad (2.24)$$

Setzt man nun (2.24) in (2.21) so bekommt man schließlich

$$\frac{d^2}{dt^2} (\delta z) = -\delta z \frac{g}{\theta} \frac{\partial}{\partial z} \theta . \quad (2.25)$$

Mit den Gleichungen (2.21) und (2.25) kann man nun einfache harmonische Schwingung in  $z$ -Richtung beschreiben. Das ausgelenkte Luftpaket bewegt sich entsprechend der Schwingungsgleichung

$$\delta z(t) = A e^{iNt} + B e^{-iNt} . \quad (2.26)$$

Mit einem realen  $N$  hat man die Schwingungsfrequenz des Luftpakets, die unter der Bezeichnung Brunt-Väisälä-Frequenz bekannt ist:

$$N = \sqrt{\frac{g}{\theta} \frac{\partial}{\partial z} \theta} . \quad (2.27)$$

Wellen können sich nur in einer stabil geschichteten Atmosphäre  $\partial\theta/\partial z > 0$  ausbreiten. Für instabile Verhältnisse  $\partial\theta/\partial z < 0$  erhält man eine komplexe Schwingungsfrequenz, sodass sich die Schwingungsgleichung ergibt zu:

$$\delta z(t) = A e^{-N_i t} + B e^{N_i t} , \quad (2.28)$$

mit  $N = iN_i$ ;  $N_i \in \mathbb{R}$ . Folglich erhält man ungebundenes Anwachsen der Amplitude  $B$ . Diese Instabilität ist abhängig von den thermischen Eigenschaften der Atmosphäre und wird als konvektive Instabilität bezeichnet. Die Brunt-Väisälä-Frequenz repräsentiert die maximale Frequenz für sich ausbreitende Schwerewellen. Für den Fall einer isotherm geschichteten Atmosphäre erhält man eine Brunt-Väisälä-Frequenz von  $N \approx 0.02 \text{ s}^{-1}$ . Nach Holton (1992) hat man für mittlere troposphärische Bedingungen eine typische Frequenz von  $N \approx 0.012 \text{ s}^{-1}$ . In der nächtlichen planetaren Grenzschicht spiegelt sich die stabilere Schichtung in einer Frequenz  $N \approx 0.2 \text{ s}^{-1}$  wider.

### 2.3. Lineare Theorie

Zum Verständnis der Theorie der Schwerewellen nutzt man gern die Beschreibung durch die lineare Theorie. Lineare Systeme sind verständlicher und einfacher nachvollziehbar als nicht-lineare Systeme. Des Weiteren lassen sie sich numerisch einfacher und schneller berechnen, was jedoch mit zunehmender Rechenleistung der Computer an Bedeutung verliert. Die Umsetzung der Linearisierung ist relativ einfach. Man separiert die Variablen  $q$  in einen konstanten bzw. sich langsam ändernden Hintergrundzustand  $q_0$  und eine Störgröße  $q_1$ . Die Störgrößen haben keinen Einfluss auf den Hintergrundzustand und werden als sehr viel kleiner als dieser angenommen, weswegen Produkte von Störgrößen vernachlässigt werden können. Diese Vereinfachung hat zur Folge, dass Wellen nicht imstande sind, miteinander in Wechselbeziehung zu treten. Einer Bildung von Wellenpaketen durch Superposition steht hingegen nichts im Wege, jedoch können die Elementarwellen keine neuen Wellen erzeugen bzw. schon existente Elementarwellen auslöschen. Jede einzelne Welle des Wellenpakets verhält sich als wäre sie die einzig anwesende Welle. Effekte aufgrund der Erdrotation und der Viskosität der Luft bleiben hier ebenfalls unberücksichtigt (Nappo 2002).

Betrachtet man die reale Atmosphäre wird einem sofort klar, dass diese Art der Beschreibung nicht den Tatsachen entsprechen kann. Komplexe Strukturen von Wellen, basierend auf der Interaktion zwischen Wellen und der Turbulenz, die ebenfalls von Wechselbeziehungen mit Wellen herrühren kann, zeigen, dass der stark vereinfachte Charakter der linearen Theorie für die Wirklichkeit nicht ausreicht. Dennoch

lassen sich mit der linearen Theorie in erster Näherung die meisten Wellenerscheinungen beschreiben.

### 2.3.1. Taylor-Goldstein-Gleichung

Gesucht ist eine Gleichung für die Vertikalgeschwindigkeit  $w$  der sich ausbreitenden linearen Schwerewelle. Die Euler-Gleichungen ergeben sich für den zweidimensionalen Fall eines rotations- und reibungsfreien Flusses, unter Verwendung der Boussinesq-Approximation (siehe Appendix A.1), zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + w\frac{\partial}{\partial z}u &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p \\
 \frac{\partial}{\partial t}w + u\frac{\partial}{\partial x}w + w\frac{\partial}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}p - g \\
 \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial z}w &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}\rho + u\frac{\partial}{\partial x}\rho + w\frac{\partial}{\partial z}\rho &= 0 .
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

mit der Geschwindigkeit  $u$  in x-Richtung. Es folgt die Linearisierung der Größen entsprechend

$$q(x, z, t) = q_0(z) + q_1(x, z, t) , \tag{2.30}$$

mit  $q_0$  als horizontal gleichförmigem, konstanten Hintergrundwert und  $q_1$ , der Störgröße erster Ordnung. Unter der Annahme eines sich im hydrostatischen Gleichgewicht befindlichen Hintergrundflusses erhält man für (2.29)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}u_1 + u_0\frac{\partial}{\partial x}u_1 + w_1\frac{\partial}{\partial z}u_0 &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}p_1 \\
 \frac{\partial}{\partial t}w_1 + u_0\frac{\partial}{\partial x}w_1 &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}p_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}g \\
 \frac{\partial}{\partial x}u_1 + \frac{\partial}{\partial z}w_1 &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + u_0\frac{\partial}{\partial x}\rho_1 + w_1\frac{\partial}{\partial z}\rho_0 &= 0 .
 \end{aligned} \tag{2.31}$$



Zur Lösung kann man sich der Fouriertransformation bedienen oder aber man nimmt für die Störgrößen den Lösungsansatz für Wellengleichungen her

$$q_1(x, z, t) = \tilde{q}(z) \cdot e^{i(kx - \omega t)} , \quad (2.32)$$

mit einem höhenabhängigen Vorfaktor  $\tilde{q}$ . Aus (2.31) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} -i\omega\tilde{u} + iu_0k\tilde{u} + \tilde{w}\frac{d}{dz}u_0 &= -\frac{i}{\rho_0}k\tilde{p} \\ -i\omega\tilde{w} + iu_0k\tilde{w} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{d}{dz}\tilde{p} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}g \\ ik\tilde{u} + \frac{d}{dz}\tilde{w} &= 0 \\ -i\omega\tilde{\rho} + iu_0k\tilde{\rho} + \tilde{w}\frac{d}{dz}\rho_0 &= 0 . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Verwendung des totalen Differentials ist insofern zulässig, als die Funktionen  $\tilde{p}, \tilde{w}, \rho_0$  und  $u_0$  nur von einer Änderung in der Vertikalen  $z$  abhängig sind. Zur weiteren Vereinfachung definiert man sich die Intrinsische Frequenz  $\Omega$ , d.h. die Kreisfrequenz der Welle relativ zur horizontalen Hintergrundgeschwindigkeit  $\vec{v}_H$ ,

$$\Omega = \omega - \vec{v}_H \cdot \vec{k} = \omega - u_0k . \quad (2.34)$$

Unter Verwendung der Brunt-Väisälä-Frequenz, ausgedrückt durch die Dichte,

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\rho_0 , \quad (2.35)$$

erhält man nun folgendes Gleichungssystem für (2.33):

$$\begin{aligned} i\Omega\tilde{u} - \tilde{w}\frac{d}{dz}u_0 &= -\frac{i}{\rho_0}k\tilde{p} \\ i\Omega\tilde{w} &= \frac{1}{\rho_0}\frac{d}{dz}\tilde{p} + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}g \\ ik\tilde{u} + \frac{d}{dz}\tilde{w} &= 0 \\ i\Omega\tilde{\rho} + \tilde{w}\frac{\rho_0}{g}N^2 &= 0 . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Löst man dieses Gleichungssystem (2.36) nach  $\tilde{w}$  auf erhält man folgende Gleichung für die Vertikalgeschwindigkeit

$$\frac{d^2}{dz^2}\tilde{w} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz}\rho_0 \frac{d}{dz}\tilde{w} + \left[ \frac{k^2 N^2}{\Omega^2} + \frac{k}{\Omega} \frac{d^2}{dz^2}u_0 + \frac{k}{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dz}\rho_0 \frac{d}{dz}u_0 - k^2 \right] \tilde{w} = 0 . \quad (2.37)$$

Der Effekt sich ändernder Dichte auf die Wellenamplitude wird durch den zweiten Term in (2.37) repräsentiert. Die Höhenabhängigkeit der Dichte in einer als isotherm geschichtet angenommenen Atmosphäre spiegelt sich in einer exponentiellen Abnahme wider,

$$\rho = \rho_s e^{-\frac{z}{H_s}} , \quad (2.38)$$

mit der mittleren Dichte  $\rho_s$  und der mittleren Höhe der isothermen Atmosphäre  $H_s$ . Es ergibt sich für (2.37):

$$\frac{d^2}{dz^2}\tilde{w} - \frac{1}{H_s} \frac{d}{dz}\tilde{w} + \left[ \frac{k^2 N^2}{\Omega^2} + \frac{k}{\Omega} \frac{d^2}{dz^2}u_0 - \frac{k}{\Omega} \frac{1}{H_s} \frac{d}{dz}u_0 - k^2 \right] \tilde{w} = 0 . \quad (2.39)$$

Zur weiteren Vereinfachung definiert man sich nun noch eine neue Vertikalgeschwindigkeit  $\hat{w}$  mit

$$\tilde{w} = \hat{w} \cdot e^{\frac{z}{H_s}} , \quad (2.40)$$

sodass sich (2.39) schreibt als

$$\frac{d^2}{dz^2}\hat{w} + \left[ \frac{k^2 N^2}{\Omega^2} + \frac{k}{\Omega} \frac{d^2}{dz^2}u_0 - \frac{k}{\Omega} \frac{1}{H_s} \frac{d}{dz}u_0 - \frac{1}{4H_s^2} - k^2 \right] \hat{w} = 0 . \quad (2.41)$$

Mit (2.41) hat man letztlich die Taylor-Goldstein-Gleichung, einen Ausdruck für die Störungen des Vertikalwindes. Innerhalb der rechteckigen Klammern von (2.41) findet man von links nach rechts folgende Terme: als erstes den Auftriebs-, danach den Krümmungs- und dann den Scherungsterm. Der vierte Term hat keinen speziellen Namen und ist unterhalb der Tropopause sehr klein. Der letzte sogenannte nicht-hydrostatische Term verschwindet, wenn sich die vertikalen Störungen im hydrostatischen Gleichgewicht befinden. Eine sich ausbreitende Welle als Lösung

ist nur dann möglich, wenn sich alle Terme innerhalb der eckigen Klammern zu einem positiven und nur gering mit der Höhe variierenden Wert ergeben. Analog erhält man für die negative Bilanz Wellenlösungen, die sich nicht vertikal ausbreiten. Dies entspricht dem Phänomen der gefangenen oder reflektierten Wellen. Eine analytische Lösung dieser Gleichung findet man näherungsweise u.a. mit der WKB-Approximation (Wenzel-Kramer-Brillouin) (Nappo 2002).

### 2.3.2. Lösung der Taylor-Goldstein-Gleichung

Zur Untersuchung der Lösung der Taylor-Goldstein-Gleichung werden im Folgenden zwei einfache Fälle betrachtet. Unter einer als konstant angenommenen Schichtung des Hintergrundzustandes werden nur Wellenlängen zugelassen, die sehr viel kleiner als die mittlere Höhe der isothermen Atmosphäre sind. Die bei der Überströmung entstehenden Schwerewellen sind abhängig vom zu überströmenden Hindernis. Im Fall einer kosinusförmigen Oberflächenform bedeutet dies eine Ausbreitung von Wellen mit einer Wellenlänge gleich der der Oberfläche. Ein sinusförmiges Gebirge ist jedoch sehr realitätsfern. Man bedient sich deshalb einer weiteren Funktion, der sogenannten *Witch of Agnesi* (Nappo 2002), die durch Anteile verschiedener Wellenlängen die Form eines Gebirges besser approximiert. Beide Fälle werden hier lediglich als stark vereinfachte Beispiele von Orographien verwendet, um die Lösung der Taylor-Goldstein-Gleichung zu verbildlichen, sowie den Charakter der Schwerewellen darzulegen.

#### Kosinusförmige Hindernisstruktur

Der folgende Abschnitt widmet sich der Betrachtung einer zweidimensionalen, gleichförmigen Überströmung eines kosinusförmigen Hindernisses unter konstanter Brunt-Väisälä-Frequenz:

$$h(x) = H \cdot e^{ik_s x} , \quad (2.42)$$

mit  $H$  als konstante Amplitude der Oberfläche und ihrer zugehörigen Wellenzahl

$$k_s = \frac{2\pi}{\lambda_s} , \quad (2.43)$$

Die Wellenlänge der kosinusförmigen Hindernisstruktur ist mit  $\lambda_s$  bezeichnet.

Gebirgsinduzierte Schwerewellen laufen dem Grundwind entgegen, d.h. deren horizontale Gruppengeschwindigkeit ist negativ und vom Betrag her gleich dem des Grundstromes  $u_0$ . Für einen stationären Beobachter erscheint die Schwerewelle folglich als räumlich stationär. Man erhält für eine stationäre Welle relativ zur Oberfläche mit  $\omega = 0$  und der intrinsischen Kreisfrequenz nach (2.34) für die intrinsische Phasengeschwindigkeit:

$$c_I = \frac{\Omega}{k} = \frac{-ku_0}{k} = -u_0 . \quad (2.44)$$

Der Wellenzahlvektor zeigt immer in Richtung der sich ausbreitenden Welle, sodass sich für dessen horizontale Komponente folgende Beziehung hinsichtlich des Vorzeichens ergibt

$$k = -|k| \operatorname{sgn}(u_0) , \quad (2.45)$$

mit  $\operatorname{sgn}(u_0)$  als Vorzeichenfunktion für  $u_0$ . Die am Boden bei der Überströmung von Hindernissen entstehenden Schwerewellen laufen dem Grundwind entgegen und erzeugen somit einen vertikalen Energietransport. Deren horizontale Gruppengeschwindigkeit ist folglich negativ und die vertikale Gruppengeschwindigkeit positiv. Die Phasenfronten, parallel zur Gruppengeschwindigkeit, sind somit vertikal geneigt. Nach (2.45) zusammen mit einem Grundwind  $u_0 > 0$  ergibt sich eine negative horizontale Wellenzahl  $k$ , die mit einer positiven vertikalen Gruppengeschwindigkeit eine vertikale Wellenzahl  $m$  kleiner Null impliziert. Die Wellenfronten bewegen sich daher vertikal zum Boden gerichtet.

Unter der Annahme konstanter atmosphärischer Schichtung und eines konstanten Hintergrundwindes zusammen mit (??) vereinfacht sich die die Taylor-Goldstein-Gleichung (2.41) zu der Form

$$\frac{d^2}{dz^2} \hat{w} = \left[ \frac{N^2}{u_0^2} - k^2 \right] \hat{w} = 0 . \quad (2.46)$$

Für den weiteren Lösungsweg bedient man sich der Transformation vom kartesischen Raum in den Wellenzahlraum und umgekehrt, in dem man eine Fouriertransformation anwendet:

$$\hat{w}(k, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(x, z) e^{-ikx} dx . \quad (2.47)$$

Es zeigen sich nun zwei Fälle, die als Lösung für (2.46) gesondert in Betracht gezogen werden müssen. Zum einen hat man den Fall vertikal geneigter Wellenfronten,

$$\frac{N^2}{u_0^2} > k^2 , \quad (2.48)$$

und zum anderen den Fall stehender Wellen, d.h. Wellenfronten parallel zur Vertikalen:

$$\frac{N^2}{u_0^2} < k^2 . \quad (2.49)$$

Für vertikal geneigte Wellenfronten sieht die gesuchte Lösung wie folgt aus:

$$\hat{w}(k, z) = Ae^{-imz} . \quad (2.50)$$

Die vertikale Wellenzahl dabei ist:

$$m^2 = \frac{N^2}{u_0^2} - k^2 . \quad (2.51)$$

Zur Auswahl geeigneter Grenzflächenbedingungen (GFB) bietet sich für die vertikale Ausbreitung von Wellen die sogenannte Strahlungsbedingung an. Diese lässt nur vertikal aufwärts gerichtete Wellenergie zu und beugt somit einer Reflexion der Wellen an der oberen Grenzfläche vor. Diese Bedingung wird durch unsere anfangs gesetzte Annahme aufwärts propagierender Schwerewellen zusammen mit der in (2.51) gewählten vertikalen Wellenzahl erfüllt. Um nun eine Lösung für A zu erhalten bedient man sich am Boden der linearen GFB. Voraussetzung dafür ist eine rotations- und reibungsfreie Hintergrundströmung und eine Oberfläche in Form einer boden-

folgenden Stromlinie. Von Stromlinien weiß man, dass sich der Fluss, normal zur Oberfläche, zu Null ergibt:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 , \quad (2.52)$$

mit  $\vec{v}$  als Geschwindigkeit des Flusses und  $\vec{n}$  dem Normalenvektor der Oberfläche. Die Gleichung der Stromlinie der Oberfläche ist:

$$\Phi = z - h(x) , \quad (2.53)$$

wobei  $h(x)$  als Störung erster Ordnung angesehen wird. Sollte das nicht der Fall sein, so müßte in  $h(x)$  noch die Abhängigkeit von der Vertikalen betrachtet werden, d.h.  $h(x, z)$ . Da dies dann jedoch nicht mehr linear ist, kann es hier nicht mit Hilfe der linearen Theorie beschrieben werden. Es ergibt sich nun für den Normaleneinheitsvektor:

$$\vec{n} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} = \frac{1}{|\nabla\Phi|} \left( -\frac{dh}{dx} \vec{e}_x + \vec{e}_z \right) . \quad (2.54)$$

Setzt man nun (2.54) in (2.52) ein und löst nach der Störgröße der vertikalen Geschwindigkeit  $w_1$  auf, so erhält man die lineare GFB am Boden:

$$w_1(x, z = 0) = u_0 \frac{d}{dx} h . \quad (2.55)$$

Unter Anwendung der Fouriertransformation zusammen mit der linearen GFB ergibt sich am Boden für (2.47):

$$\hat{w}(k, z = 0) = u_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} h e^{-ikx} dx . \quad (2.56)$$

Wird (2.56) nun noch partiell integriert und für  $h(x)$  die Oberflächenbeschaffenheit aus (2.42) eingesetzt, so ergibt sich für die Fouriertransformierte im Wellenzahlraum am Boden:

$$\hat{w}(k, z = 0) = iu_0 k \int_{-\infty}^{+\infty} H e^{-i(k-k_s)x} dx . \quad (2.57)$$

Für unseren Fall  $N^2/u_0^2 > k^2$  ist die Lösung entsprechend (2.50). Es ergibt sich daher an der Oberfläche für den Koeffizienten  $A$

$$A = \hat{w}(k, z = 0) = 2\pi i u_0 k H \cdot \delta(k - k_s) , \quad (2.58)$$

mit der Delta-Dirac-Funktion  $\delta(k - k_s)$  (siehe Appendix A.2). Alle entstehenden Schwerewellen setzen sich nur aus der Wellenzahl zusammen, die in Resonanz mit der Oberfläche steht. Für den Wellenzahlraum ergibt sich folglich nur eine Lösung

$$\hat{w}(k, z) = 2\pi i u_0 k H \cdot \delta(k - k_s) . \quad (2.59)$$

Vollzieht man die inverse Fouriertransformation, so erhält man die Lösung im kartesischen Raum

$$w_1(x, z) = i u_0 H \int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-imz - ikx} \delta(k - k_s) dk . \quad (2.60)$$

Für  $u_0 > 0$  mit (2.45) ergibt sich nach Integration von (2.60) eine Gleichung für die Vertikalgeschwindigkeit

$$w_1(x, z) = -i u_0 H k_s e^{-i(k_s x + m_s z)} , \quad (2.61)$$

Die vertikale Wellenzahl  $m_s$  ergibt sich aus (2.51) ebenso aus Resonanz zur Oberfläche:

$$m_s = \left( \frac{N^2}{u_0^2} - k_s \right) .$$

Setzt man nun Gleichung (2.61) in die Polarisationsgleichungen (Hines 1960) (2.33) ein, so erhält man

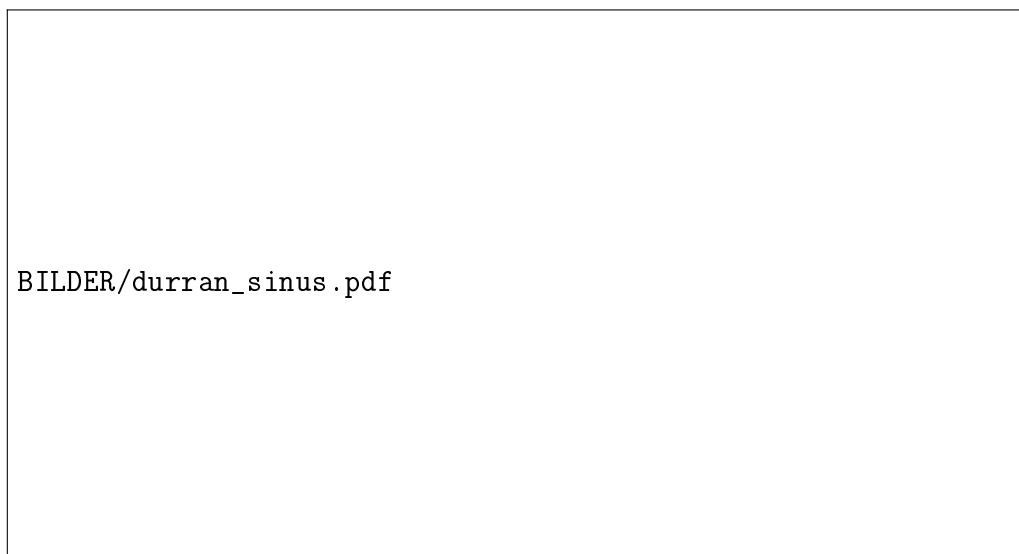
$$\begin{aligned} u_1(x, z) &= i u_0 H m_s e^{-i(k_s x + m_s z)} , \\ p_1(x, z) &= i \rho_0 u_0^2 H m_s e^{-i(k_s x + m_s z)} , \\ \Theta_1(x, z) &= H \frac{d\Theta_0}{dz} e^{-i(k_s x + m_s z)} , \end{aligned} \quad (2.62)$$

deren Realteile die Wellenstörungen für Druck, Windgeschwindigkeit und potentielle Temperatur entlang einer Oberflächenwelle bei positivem Grundwind repräsentieren.

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung für Störgrößen aus (2.31) kann man sich nun in erster Näherung eine vertikale Verschiebung der Stromlinien  $\xi(x, z)$  definieren, sodass

$$w_1(x, z) = u_0 \frac{\partial \xi_1(x, z)}{\partial x}. \quad (2.63)$$

Vergleicht man (2.63) mit (2.55), so zeigt sich für  $\xi_1(x, 0)$ , dass dies die Oberflächenstruktur widerspiegelt.



**Abb. 2.1:** Stromlinien konstanter Überströmung einer sinusförmigen Oberflächenstruktur mit  $N = 0.01 \text{ s}^{-1}$ ,  $u_0 = 15 \text{ ms}^{-1}$  und einer Wellenlänge der Oberfläche a) 8 km ( $N/u_0 < k$ ) und b) 40 km ( $N/u_0 > k$ ). Die Strömung erfolgt von links nach rechts und die unterste Stromlinie repräsentiert die Oberfläche. (Durrán 2003)

In Abb. 2.1(b) (Durrán 2003) sind die Verschiebungen der Stromlinien dargestellt. Dem zugrunde liegt eine Überströmung bei konstantem Hintergrundwind  $u_0 = 15 \text{ ms}^{-1}$  und kontinuierlich geschichteter Atmosphäre,  $N = 0.01 \text{ s}^{-1}$ . Die Wellenlänge  $\lambda_z$  der sinusförmigen Oberfläche beträgt 40 km. Es bilden sich Wellen mit einer vertikalen Wellenlänge von  $\lambda_z \approx 10 \text{ km}$  aus, welche die horizontale Phase der Oberflächenstruktur in einer Höhe  $z = \lambda_z$  wiedergeben. Des Weiteren ist eine deutlich vertikale Neigung der sich ungedämpft ausbreitenden Wellenfronten zu erkennen.



Zieht man nun den Fall  $N^2/u_0^2 > k^2$  in Betracht, so ergeben sich stehende Wellen, deren vertikale Ausbreitung gedämpft ist. Die Lösung für die Wellenstörung des Vertikalwindes ist dann

$$w_1(x, z) = -u_0 H k_s e^{-\alpha z} \sin(k_s x) , \quad (2.64)$$

mit einer vertikalen Wellenzahl

$$m = \pm i k \left( 1 - \frac{N^2}{\omega_s^2} \right)^{1/2} = \pm i \alpha . \quad (2.65)$$

Alle Gleichungen der Wellenstörungen erhalten somit einen zusätzlichen exponentiellen Dämpfungsterm mit einem Dämpfungskoeffizienten  $\alpha$ . Abbildung 2.1(a) zeigt eine stehende Welle, deren Wellenfront parallel zur Vertikalen liegt. Die vertikale Wellenlänge  $\lambda_z$  beträgt 8 km und weist eine Dämpfung in Richtung der Vertikalen auf. Voraussetzung für das Entstehen solcher stehenden Wellen ist eine kräftige Hintergrundströmung  $u_0$ , eine geringe Brunt-Väisälä-Frequenz oder eine geringe Wellenlänge  $\lambda_s$  der Oberfläche.

### Witch of Agnesi

Zur idealisierten Darstellung von Gebirgen nutzt man einfache Funktionen, wie die der Gauss'schen Glockenkurve

$$h(x) = H e^{-\frac{x^2}{b^2}} ,$$

oder die Funktion *Witch of Agnesi*, welche zu Ehren der italienischen Mathematikerin Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) benannt ist:

$$h(x) = \frac{H b^2}{x^2 + b^2} . \quad (2.66)$$

Die Höhe des Berges wird mit  $H$  und dessen Halbwertsbreite mit  $b$  (vgl. Abb. 2.2) beschrieben.

Für den Fall eines konstanten Hintergrundwindes und unter Erfüllung der Strahlungsbedingung, sowie der linearen GFB (2.55) erhält man für die Fouriertransformation (2.47) am Boden

$$\hat{w}(k, 0) = iu_0k \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-ikx} dx . \quad (2.67)$$

Setzt man nun für  $h(x)$  die Oberflächenstruktur, in dem Fall die Agnesi-Funktion ein, so erhält man nach der Integration folgende Lösung der Taylor-Goldstein-Gleichung (2.46)

$$\hat{w}(k, 0) = iu_0kHb\pi e^{-|kb|} . \quad (2.68)$$

Nach der Rücktransformation und der Bildung des Realteiles  $\text{Re}$  erhält man für die Störung der Vertikalgeschwindigkeit

$$w_1(x, z) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{w}(k, 0) e^{-imz}] e^{-ikx} dk \right\} . \quad (2.69)$$

BILDER/agnesi.pdf

**Abb. 2.2:** Funktion nach Agnesi

Laut (2.45) ist die horizontale Wellenzahl für  $u_0 > 0$  mit einem negativen Vorzeichen versehen. Unter Verwendung von (2.68) ergibt sich letztlich

$$w_1(x, z) = \text{Re} \left\{ iu_0Hb \int_0^{+\infty} (-k) e^{-|kb|} e^{-i(kx+mz)} dk \right\} . \quad (2.70)$$

Man muss im Folgenden wiederum zwischen vertikal propagierenden geneigten Wellen  $N^2/u_0^2 < k^2$  und stehenden Wellen  $N^2/u_0^2 > k^2$  unterscheiden. Der Übergangsbereich wird durch die sogenannte *Cut-Off-Wellenzahl*  $k_c$  gekennzeichnet:

$$k_c = \frac{N}{u_0} . \quad (2.71)$$

Gleichung (2.70) lässt sich somit in folgender Weise darstellen

$$w_1(x, z) = u_0 H b \left[ \int_0^{k_c} e^{-|kb|} k \sin(kx + mz) dk + \int_{k_c}^{+\infty} e^{-|kb|} k e^{-qz} \sin(kx) dk \right] , \quad (2.72)$$

mit  $q$  gegeben durch (2.65). Das erste Integral beschreibt den Beitrag zur Vertikalgeschwindigkeit durch die propagierenden geneigten Wellen, während das zweite Integral den Beitrag der stehenden Welle liefert. Anders als im Fall sinusförmiger Oberflächenstruktur muss hier über alle Wellenzahlen integriert werden, da jede Welle unabhängig zu den anderen ihren Beitrag zu den Störgrößen beisteuert.



### 3. Modellbeschreibung ASAM

Das am Leibniz-Institut für Troposphärenforschung in Leipzig entwickelte Modell ASAM (All Scale Atmospheric Model) ist ein Strömungsmodell, mit der zusätzlichen Möglichkeit chemische Prozesse zu simulieren und Transport- sowie Ausbreitungsrechnungen durchzuführen. Ziel der Entwicklung ist die Simulation beliebigskaliger atmosphärischer Prozesse. So sollen globale Strömungsverhältnisse (Makroskala) ebenso berechenbar sein, wie kleinskalige Umströmungen von Hindernissen (Mikroskala). Die Anwendbarkeit eines Modells auf einen bestimmten Skalenbereich in Ort und Zeit ist stark von den ihm zugrunde liegenden Gleichungssystemen und deren Approximationen abhängig. So kann man bei angenommener Inkompressibilität nur kleinskalige Strömungsvorgänge, wie die Umströmung von Strassenschluchten und Häusern, simulieren. Hingegen ergibt sich für die hydrostatische Approximation vorzugsweise eine Betrachtung großskaliger Phänomene, wie die globale Zirkulation (Schimmel 2002). Nicht zu vernachlässigen ist die Diskretisierung zur numerischen Behandlung verschiedenskaliger Problemstellungen. In Abhängigkeit von der Auflösung können in der Atmosphärenmodellierung viele physikalische *sub-grid-scale* Prozesse, wie die Turbulenz oder die Grenzschicht am Boden, nur durch Parametrisierung dargestellt werden. Generell muss dafür Sorge getragen werden, dass die Art der Parametrisierung und der Approximationen der zu betrachtenden Aufgabenstellung entspricht, sodass die entsprechenden Phänomene aufgelöst werden können.

### 3.1. Erhaltungsgleichungen

Man definiert den Zustand  $Z$  eines Teilchens durch seinen Ort und den dazugehörigen Impuls. Für die Strömungsmodellierung werden üblicherweise anstelle von Teilchen die Volumina betrachtet, deren Zustand sich aus der Mittelung über die Zustände der beinhalteten Teilchen ergibt. Dem Volumen kann folglich ein Gesamtimpuls  $\rho\vec{u}$  zugeordnet werden, um den ein Störimpuls  $\rho\vec{u}'$  schwankt. Auslöser dafür ist die thermisch getriebene Eigenbewegung von Teilchen, auch bekannt als Brown'sche Molekularbewegung. Diese ungeordnete Bewegung definiert eine mittlere kinetische Energie, die der thermischen Energie des Volumens entspricht. Der Zustand eines kompressiblen viskosen Fluids innerhalb eines dreidimensionalen Kontrollvolumens kann somit näherungsweise durch die über das Volumen gemittelten Zustandsgrößen Dichte, Impuls und potentielle Temperatur beschrieben werden:

$$Z = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho\theta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Jede dieser Größen ist eine Erhaltungsgröße und es gelten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Zusammen ergeben diese ein Gleichungssystem, die sogenannten Euler-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + \delta_{ij}p) = -2\rho\epsilon_{ijk}\Omega_j u_k - \rho g_i, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\theta u_j) = 0. \quad (3.4)$$

Hierbei wurde das kartesische Koordinatensystem gewählt mit den drei Raumrichtungen  $x_i = x, y, z$  für  $i = 1, 2, 3$  und den dazugehörigen Geschwindigkeitskomponenten  $u_i = u, v, w$  in der Ausrichtung Ost, Nord und vertikal aufwärts. Der Einfluss durch geophysikalische Eigenschaften findet in der Schwerebeschleunigung  $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$  und der durch die Erdrotation hervorgerufenen Winkelbeschleu-

nigung  $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$  Ausdruck. Für weitere Betrachtungen wird der Einfluss der Erdrotation vernachlässigt. Weiters gilt die Einstein'sche Summenkonvention mit Ausnahme des Index  $i$ , der die drei Raumrichtungen repräsentiert. Als weitere Symbolik sind hier das Kronecker Symbol  $\delta_{ij}$  und der alternierenden Tensor nach Levi-Civita  $\epsilon_{ijk}$  aufgeführt. Letzteres ermöglicht eine komponentenweise Darstellung der Coriolis-Kraft  $2\rho\vec{\Omega} \times \vec{u}$ . Für den Druck wird das ideale Gasgesetz angenommen.

### 3.1.1. Favre-gemittelte Erhaltungsgleichungen

Nachdem mit (3.2)-(3.4) die momentanen Gleichungen vorgestellt wurden, wird nun der Übergang zur Behandlung der Transportgleichungen im Falle turbulenter Strömungen vorgestellt. Da die vollständige Auflösung aller Zeit- und Längenskalen numerisch zu aufwendig ist, werden statt der Momentanwerte üblicherweise statistische Momente gelöst. Das bedeutet allerdings auch, dass ein Teil der Informationen verloren geht. Ausgangspunkt der Entwicklung turbulenter Erhaltungsgleichungen ist die Zerlegung der Momentangröße  $\phi$  in Mittelwert  $\bar{\phi}$  und Störungsgröße  $\phi'$ .

$$\text{Reynolds-Zerlegung: } \phi(x) = \bar{\phi}(x) + \phi'(x) \quad (3.5)$$

$$\text{Favre-Zerlegung: } \phi(x) = \hat{\phi}(x) + \phi''(x) \quad (3.6)$$

$$\text{Favre-Mittelung: } \hat{\phi}(x) = \frac{\overline{\rho(x)\phi(x)}}{\bar{\rho}(x)}. \quad (3.7)$$

Per Definition verschwindet der zeitliche Mittelwert der Störungen bei Reynold-Zerlegung, d. h.  $\overline{\phi'(x)} = 0$ . Im Gegensatz dazu ist bei der Favre-Mittelung  $\overline{\phi''(x)} \neq 0$ , aber  $\overline{\rho\phi''(x)} = 0$ . Die Anwendung beider Zerlegungen auf den konvektiven Term  $\overline{\rho u_i u_j}$  der Impulserhaltungsgleichung (3.3) führt zu:

$$\begin{aligned} \text{Reynolds: } \overline{\rho u_i u_j} &= \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \\ &= \overline{\bar{\rho} u_i u_j + \bar{\rho} u'_i u'_j + \bar{u}_i \rho' u'_j + \bar{u}_j \rho' u'_i + \rho' u'_i u'_j}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Favre: } \overline{\rho u_i u_j} &= \overline{\rho(\hat{u}_i + u''_i)(\hat{u}_j + u''_j)} = \\ &= \overline{\bar{\rho} \hat{u}_i \hat{u}_j + \hat{u}_i \bar{\rho} u''_j + \hat{u}_j \bar{\rho} u''_i + \rho u''_i u''_j} = \\ &= \bar{\rho} \hat{u}_i \hat{u}_j + \overline{\rho u''_i u''_j}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Der Vorteil der Favre-Mittelung im Vergleich zur Reynolds-Mittelung wird klar ersichtlich. Der resultierende Ausdruck hat nur zwei Terme im Vergleich zu den fünf Termen der Reynolds-Zerlegung. Dieses spricht aus Sichtweise der mathematischen Behandlung stark für die Anwendung dichtegewichteter Favre-Größen. Der Nachteil der Favre-Mittelung ist, dass die modellierten Terme messtechnisch nur sehr schwer zu bestimmen sind, da die Dichtefluktuationen gleichzeitig erfasst werden müssen. Da in der Atmosphäre die Dichte deutlichen Änderungen unterworfen ist, wurden im ASAM ausschließlich dichtegemittelte Größen verwendet. Unter Anwendung der Favre-Mittelung auf die Erhaltungsgleichungen (3.2)-(3.4) erhält man die gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \frac{\partial (\bar{\rho} \hat{u}_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \hat{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \hat{u}_i \hat{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i'' u_j''} + \delta_{ij} \bar{p}) = -\bar{\rho} g_i, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \hat{\theta}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \hat{\theta} \hat{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \theta'' u_j''}) = 0. \quad (3.12)$$

Die favre-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen enthalten turbulente Terme 2. Ordnung: die Reynold's Spannungen  $\overline{\rho u_i'' u_j''}$  und den skalaren turbulenten Fluss  $\overline{\rho \theta'' u_j''}$  (vgl. Abschnitt 3.1.1). Diese Terme fasst man zusammen im Reynold's Spannungstensor  $\tau_{ij}$  und dem skalaren Wärmefluss  $H_{ij}$ :

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''}, \quad (3.13)$$

$$H_{ij} = -\overline{\rho \theta'' u_j''}. \quad (3.14)$$

Mit der Mittelung verliert man Informationen der Grundgleichungen. Grund dafür ist die Approximation der unbekanntenen Größen durch Funktionen der gemittelten Variablen. Man kennt dies unter dem Schließungsproblem der Turbulenz. Verschiedene Alternativen basierend auf der Ordnung der turbulenten Größen und der damit einhergehenden Annahmen werden zur Parametrisierung dieses Problems verwendet (siehe Abschnitt 3.4).



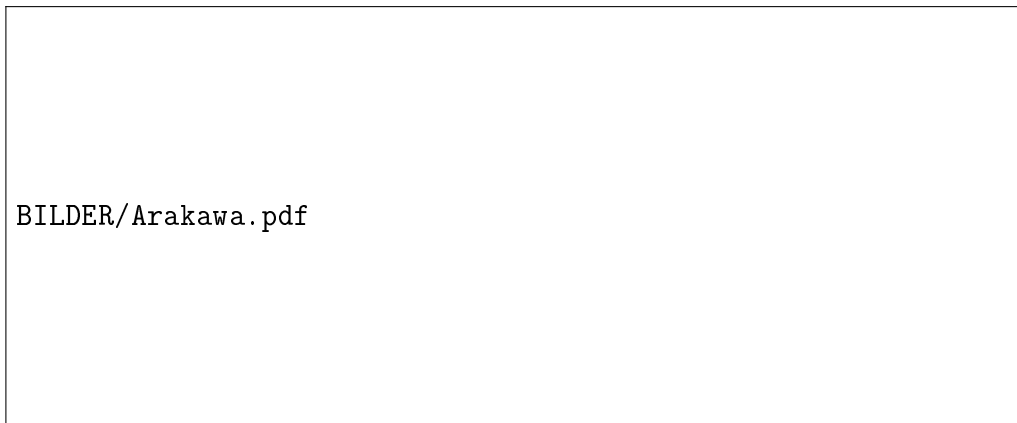
Als eine Schlüsselvariable der Definition turbulenter Flüsse gilt die turbulent kinetische Energie  $k$ . Sie ist definiert als einhalb der Spur des Reynold Spannungstensors, sodass sich für die favre-gemittelte turbulent kinetische Energie ergibt:

$$\hat{k} = \frac{1}{2} \widehat{u_i'' u_i''} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{\bar{\rho}} \quad (3.15)$$

## 3.2. Diskretisierung und Geometrie

### 3.2.1. Gitterstruktur

Zur Diskretisierung können verschiedene Arten von Gittern verwendet werden. Bei kartesischen Koordinaten nimmt man dazu meist die unter der Bezeichnung Arakawa A bis E bekannt sind. Abbildung 3.1(a) verdeutlicht wie die Größen Druck, Dichte, Temperatur, turbulent kinetische Energie (TKE), Dissipation und die Geschwindigkeiten bei einem Arakawa A Gitter im Mittelpunkt der Gitterzelle definiert werden. Der Unterschied zu Arakawa C (Abb. 3.1(b)) besteht darin, dass dort die Geschwindigkeiten auf den entsprechenden Flächen der Gitterzelle definiert sind. Dem ASAM liegt ein verschobenes Gitter (Arakawa C) zugrunde, da sich dieses im Vergleich zu Arakawa A mit realitätsnäheren Ergebnissen hervor getan hat (Horn 2006).



**Abb. 3.1:** Gittertypen: a) Arakawa A und b) Arakawa C

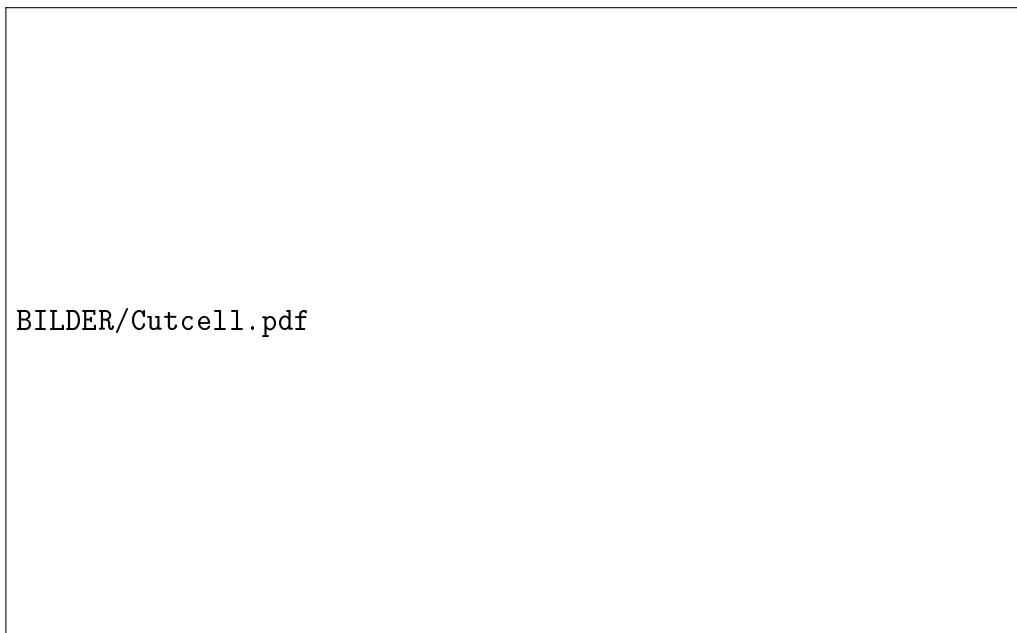
Des Weiteren besteht die Möglichkeit das Gitter in Blöcke aufzuteilen und lokal zu verfeinern. Dies ist besonders von Vorteil, wenn u.a. zur Darstellung kleinskaliger

Turbulenz Geometrien höher aufgelöst werden müssen. Technisch realisiert wird dies durch eine Einbettung des höher aufgelösten Bereiches innerhalb des größeren Gitters. Die maximale Auflösung wird durch das hochaufgelöste Gebiet bestimmt. Da dies je nach Größe des Gitters sehr rechenintensiv werden kann, ist der Programmcode von ASAM parallelisiert. Realisiert wird dies mittels Message Passing Interface (MPI), einem frei verfügbaren Standard für paralleles Rechnen auf Höchstleistungsrechnern. Die verschiedenen Blöcke können auf mehrere Prozessoren verteilt werden. Diese führen dann die Berechnungen durch und kommunizieren untereinander mittels MPI. Dadurch kann ein Problem zeitlich effizienter gelöst werden.

### 3.2.2. Cutcells

Die Geometrie im Modell ASAM wird durch Cutcells approximiert. Dies sind Gitterzellen, in denen die Schnittmenge aus Gitterzelle und Geometrie herausgeschnitten wurde (Abb. 3.2). Folglich müssen das Volumen der Zelle und die Flächen zu benachbarten Zellen neu berechnet werden. Für zum Gitter orthogonal ausgerichtete Geometrien gestaltet sich die Berechnung der Flächen und Volumina einfach, besonders dann, wenn Punkte oder Flächen der Geometrie mit Gitterpunkten oder Gitterflächen zusammenfallen. Für Geometrien mit beliebiger Ausrichtung zum Gitter wird die Berechnung wesentlich komplizierter.

In Horn (2006) wurde ein Algorithmus entwickelt der die Volumina, Flächen und Flächennormalen rekursiv ermittelt. Die Geometrie wird dabei als eine Menge aus konvexen Körpern, die über ihre Eckpunkte und die enthaltenen Flächen definiert sind, dargestellt. Nun wird jede an die Geometrie angrenzende Zelle verfeinert. Die dadurch entstehenden Subzellen werden auf ihre Lage zur Geometrie untersucht und dabei in innerhalb oder ausserhalb der Geometrie liegende sowie angeschnittene Zellen unterteilt. Diese Verfeinerung der angeschnittenen Zellen setzt sich fort bis eine ausreichende Genauigkeit erreicht ist. Aus den nun vorliegenden Subzellen werden benötigte Größen wie Schnittfläche, Normalenvektor, Material und Aufpunkt der Schnittfläche, die noch freien Randflächen und das Volumen der Gitterzelle berechnet. Die Approximation durch solch eine rekursive Verfeinerung ist immer mit einem Fehler behaftet, der sich abhängig von der Rekursionstiefe gestaltet. Erhöht man die maximale Rekursionstiefe, so bewirkt dies eine Minderung des Fehlers jedoch auch eine Zunahme der Rechenzeit.



**Abb. 3.2:** Geometrie mit darüberliegendem kartesischen Gitter. Angeschnittene Gitterzelle (Cutcell) hervorgehoben.

### 3.2.3. Zeitdiskretisierung

Die RANS-Gleichungen (??)-(??) örtlich diskretisiert, ergeben ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y' = F(y) . \quad (3.16)$$

Dieses System wird nun mittels einer speziellen Rosenbrock-Methode zeitlich integriert (Lanser u. a. 2001):

$$\begin{aligned} w^{n+1} &= w^n + \frac{5}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 \\ Mk_1 &= \tau F(w^n) \\ Mk_2 &= \tau F\left(w^n + \frac{2}{3}k_1\right) - \frac{4}{3}k_1 \\ M &= I - \gamma\tau J , \quad J = F'(w^n) \end{aligned} \quad (3.17)$$

mit den Parametern  $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$  und  $\tau$ , sowie den Inkrementen  $k_1$  und  $k_2$ . Die numerische Lösung zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t = n$ ,  $n \in N$  wird mit  $\omega$  bezeichnet. Dieses Rosenbrock-Schema, als eine verallgemeinerte Form der linear impliziten Eulermethode, erlaubt nun eine vereinfachte Lösung des linearen Gleichungssystems ohne einen Verlust der Ordnung. Mit der Aufspaltung des Jacobioperators  $J = J_A + J_B$  kann man die Matrix  $M$  durch  $M = (I - \gamma\tau J_A)(I - \gamma\tau J_B)$  ersetzen. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch die Vernachlässigung einiger Ableitungen der Jacobimatrix oder durch Ersetzung dieser mit Ableitungen eines vereinfachten Operators  $\tilde{F}(w^n)$ . Diese Vereinfachungen der Matrix reduzieren die Methode auf eine zweite Ordnung. Der Jacobioperator besitzt folgende Struktur

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} & \frac{\partial F_\rho}{\partial \bar{v}} & 0 \\ \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \Theta} \\ 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \Theta} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

dabei symbolisiert die 0 eines Matrixelements, dass dieses in der Jacobimatrix nicht enthalten ist oder fehlt. Die Ableitung nach der Dichte  $\rho$  zeigt sich dabei nur in dem Auftriebsterm der vertikalen Impulserhaltungsgleichung, was das Standardvorgehen der Boussinesq-Approximation (A.1) widerspiegelt. Man kann die Jacobimatrix in zwei Teile aufspalten:

$$J = J_T + J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \bar{v}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \Theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F_\rho}{\partial \bar{v}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \Theta} \\ 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \bar{v}} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

oder

$$J = J_T + J_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \bar{v}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \Theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F_\rho}{\partial \bar{v}} & 0 \\ \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \rho} & 0 & \frac{\partial F_{\bar{v}}}{\partial \Theta} \\ 0 & \frac{\partial F_\Theta}{\partial \bar{v}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Der erste Teil  $J_T$  wird Transport-/ Quellterm genannt und beinhaltet neben der Advektion und Diffusion die Quellterme basierend auf der Coriolisablenkung, der Krümmung, dem Auftrieb, der latenten Wärme, etc. Als Druckterm bezeichnet man die zweite Matrix  $J_P$ . Dieser setzt sich zusammen aus dem Druckgradienten sowie der

Ableitung der Divergenz in Bezug auf den Impuls der Kontinuitäts- und Wärmeleichung. Der Unterschied zwischen den zwei Aufspaltungen (3.19) und (3.20) zeigt sich in der Zuordnung des Termes der Schwerkraft zum Transport- bzw. dem Druckterm. Ersteres dämpft nur akustische Schallwellen und kann auf eine Gleichung ähnlich einer Poissongleichung reduziert werden. In (3.20) hingegen findet eine Dämpfung von akustischen Schallwellen und Schwerewellen statt. Die Dimension des Systems verdoppelt sich jedoch in diesem Fall. Beide Systeme lassen sich mithilfe der Methode preconditionierter konjugierter Gradienten (CG-Methode) lösen. Im ASAM ist sowohl die Schreibweise (3.19) als auch die nach (3.20) implementiert. Man kann eine der beiden Systeme auswählen.

### 3.3. Strahlungsmodell

Im ASAM ist zur Parametrisierung der Strahlung das Modell nach Fu-Liou (Fu und Liou 1993) implementiert. Es berechnet in eindimensionalen planparallelen Schichten die Anteile der Strahlung, die transmittiert bzw. gestreut werden. Es berücksichtigt Mehrfachstreuung. Die Strahlungstransfergleichungen werden in insgesamt 18 Frequenzbändern gelöst, wovon sich sechs im kurzwelligen und Zwölf im langwelligen Frequenzbereich befinden. Absorptions- und Streueigenschaften der Gase Sauerstoff, Kohlenstoffdioxid, Stickstoff und Stickstoffoxide, Ozon, Methan und die von Wasser, sowie verschiedener Arten von Aerosolen werden durch das Strahlungsmodell berücksichtigt. Für Wasser wird zwischen Dampf, Wasserwolken, Eiswolken, Regen und Graupel unterschieden. Für das Modell ASAM finden zur Zeit die direkt und diffus auf die Oberfläche einfallende Strahlung Verwendung, sowie die Heizraten der einzelnen Luftschichten. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt liegt dem Strahlungsmodell noch eine über den Modelllauf konstant bleibende Standardatmosphäre zugrunde, eine Rückkopplung mit dem Modellgebiet findet noch nicht statt (Horn 2006).

### 3.4. Turbulenzmodell

Möchte man das Phänomen Turbulenz in seinen Eigenschaften beschreiben, so sind folgende Aspekte zu nennen: Hochgradig instationäre, dreidimensionale Wirbelbewegungen spiegeln eine chaotische Regellosigkeit wider, die Ausdruck der Empfind-

lichkeit gegenüber kleinen Änderungen in den Anfangs- und Randbedingungen ist. Turbulente Strömungen sind dissipativ, sodass die kinetische Energie in einem abgeschlossenen System ohne äußere Zufuhr von Bewegungsenergie mit der Zeit abnimmt. Einen weiteren wesentlichen Effekt auf die Grundströmung besitzt die turbulente Diffusion, die den Austausch von Impuls und skalaren Größen im Raum kennzeichnet und um Größenordnungen stärker ist als der molekulare Austausch. Die gleichzeitige Präsenz turbulenter Bewegung auf vielen räumlichen und zeitlichen Skalen führt zu Energieaustausch und Wechselwirkung zwischen Bewegungen auf verschiedenen Skalen. Turbulente Fluktuationen sind das Resultat eines Wechselspiels zwischen erzeugenden, transferierenden und vernichtenden Mechanismen (Fröhlich 2006).

Ein Turbulenzmodell dient in der numerischen Strömungssimulation zur Schließung des zugrundeliegenden Gleichungssystems. In unserem Fall setzt sich eben dieses Gleichungssystem aus den Favre-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (3.10) - (3.12) zusammen, deren Schließung unter dem Begriff der statistischen Turbulenzmodellierung zusammengefasst wird.

Mit dem Reynold's Spannungstensor (3.13) erhält man neben Wind, potentielle Temperatur, Druck und Dichte weitere unbekannte Variablen, die Reynoldsspannungen. Man benötigt zusätzliche Informationen, mit deren Hilfe man das Gleichungssystem der gemittelten Grundgleichungen schließen kann. Die statistische Turbulenzmodellierung hat somit zur Aufgabe, ein Modell  $\tau_{ij}^{mod} \approx \tau_{ij}$  bereitzustellen, das in geschlossener und damit lösbarer Weise definiert ist (Fröhlich 2006).

Eine Möglichkeit zur Turbulenzparametrisierung stellen die Wirbelviskositätsmodelle dar. Diese basieren auf der Einführung eines kinematischen Viskositätskoeffizienten  $\nu_m$  zusätzlich zur molekularen Viskosität  $\nu$ . Die Modelle unterscheiden sich in der Anzahl der unabhängigen Turbulenzvariablen. Man differenziert nach Null-, Ein- und Zweigleichungsmodelle. Modelle höherer Ordnung werden in dieser Arbeit nicht vorgestellt und Austauschprozesse basierend auf molekularer Viskosität vernachlässigt.

### 3.4.1. Turbulenzschema 0. Ordnung

Nullgleichungsmodelle basieren auf rein lokalen Ansätzen und verwenden zur Schließung nur algebraische Beziehungen, d.h. eine Lösung zusätzlicher Transportgleichungen ist nicht nötig. Folglich können die entsprechenden Transportmechanismen nicht repräsentiert werden, worunter die Qualität und die Allgemeingültigkeit dieser Modelle leidet. Basierend auf der Veröffentlichung von Doyle und Durran (2007) wurde im Rahmen dieser Arbeit als ein Vertreter der Nullgleichungsmodelle das Schema des lokalen Gleichgewichts nach Lilly und Smagorinsky implementiert (Lilly (1964); Smagorinsky (1963)). Der turbulente Impulsfluss  $\tau_{ij}$  und der Wärmefluss  $H_j$  werden dabei folgendermaßen repräsentiert:

$$\tau_{ij} = -\nu_m \bar{\rho} S_{ij} , \quad (3.21)$$

$$H_j = -\nu_h \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \hat{\theta}) , \quad (3.22)$$

mit den Diffusionskoeffizienten  $\nu_m$  für den Impulsaustausch und  $\nu_h$  für den Wärmefluss, sowie dem Deformationstensor  $S_{ij}$ :

$$S_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{u}_j - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_j , \quad (3.23)$$

Die turbulenten Diffusionskoeffizienten werden im Lilly-Smagorinsky Modell wie folgt bestimmt:

$$\nu_m = \lambda^2 \left[ \max \left( S^2 - \frac{c_{h1} + c_{h2}}{c_m} N^2, 0 \right) \right]^{1/2} , \quad \nu_h = \frac{c_{h1} + c_{h2}}{c_m} \nu_m , \quad (3.24)$$

mit dem Quadrat des Deformationstensors  $S^2 = 2S_{ij}S_{ij}$ . Die turbulente Längenskala  $\lambda = c_s \Lambda$  ergibt sich aus der Mischungsweglänge  $\Lambda$ , die wiederum abhängig von der Modellauflösung  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  ist:

$$\Lambda = \min \left( (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}, \Delta z \right) \quad (3.25)$$

und einer Konstanten  $c_s$

$$c_s = \left( \frac{c_m^3}{c_{\epsilon 1} + c_{\epsilon 2}} \right)^{1/4} \quad (3.26)$$

Die Konstanten basieren auf den Werten von Stevens u. a. (1999) und sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

$c_m$	$c_{h1}$	$c_{h2}$	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$
0.0856	0.0856	0.1184	0.1911	0.6539

**Tabelle 3.1.:** Empirische Konstanten für das Lilly-Smagorinsky Modell nach Stevens u. a. (1999).

### 3.4.2. Turbulenzschema Subgrid Scale (SGS)

Als ein Vertreter der Eingleichungsmodelle kennt man das *subgrid-scale* Modell (SGS) nach Herzog u. a. (2002). Ausgehend von den Favre-gemittelten NS-Gleichungen zusammen mit einer Turbulenzschließung 1. Ordnung erhält man für den Impuls- und Wärmefluss

$$\tau_{ij} = -\nu_m \bar{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{u}_j \right), \quad (3.27)$$

$$H_{ij} = -\nu_h \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \hat{\theta}). \quad (3.28)$$

Die turbulenten Austauschkoefizienten

$$\nu_m = \phi_m \Lambda \sqrt{k}, \quad \nu_h = \phi_h \Lambda \sqrt{k} \quad (3.29)$$

beinhalten noch zu bestimmende stabilitätsabhängige Faktoren  $\phi_m$  und  $\phi_h$ . Als prognostische Gleichung wird die  $k$ -Gleichung heran gezogen:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \hat{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \hat{u}_j \hat{k}) = -\nu_h \bar{\rho} N^2 + \nu_m \bar{\rho} S^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu_m \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{k} \right) - c_\epsilon \frac{\bar{\rho} \hat{k}^{3/2}}{\Lambda}. \quad (3.30)$$



Eine detailliertere Beschreibung findet sich bei Herzog u. a. (2002). In Gleichung (3.30) bezeichnen  $N^2$  das Quadrat der Brunt-Väisälä Frequenz (2.27) und  $S^2$  das Quadrat des Deformationstensors

$$S^2 = 2S_{ij}S_{ij} = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{u}_j \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_i \quad (3.31)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{u}_j \right)^2 . \quad (3.32)$$

Durch Lösung der prognostischen Gleichung (3.30) erhält man die TKE und ist somit in der Lage  $\nu_m$  und  $\nu_h$  nach (3.29) zu bestimmen, vorausgesetzt die Koeffizienten  $\phi_m$  und  $\phi_h$  sind bekannt. Man erhält eine stabilitätsabhängige Prandtlzahl

$$Pr = \frac{\nu_m}{\nu_h} = \frac{\phi_m}{\phi_h} . \quad (3.33)$$

Ausgehend von einem einfacheren Smagorinski-SGS-Modell (Brown u. a. 1994) definiert man die Austauschkoefizienten wie folgt:

$$\nu_m = \lambda^2 S F_m (Ri) , \quad \nu_h = \lambda^2 S F_h (Ri) . \quad (3.34)$$

mit der Wurzel des Quadrates des Deformationstensors  $S$  definitionsgemäß nach (3.31). Die Stabilitätsabhängigkeit spiegelt sich in den Funktionen  $F_m$  und  $F_h$  wider. Sie basieren auf den „Kansas Daten“ . Diese Daten sind Beobachtungen meteorologischer Größen eines Feldexperiments in Kansas 1968 (Izumi (1971); Kaimal und Wyngaard (1990)). Für die turbulente Längenskala  $\lambda$  des Smagorinsky Modells gilt:

$$\lambda = c_s \Lambda , \quad (3.35)$$

mit einem konstanten Vorfaktor  $c_s = 0.25$ .

Folgt man Brown u. a. (1994), so stellen die Funktionen  $F_m$  und  $F_h$  für statisch stabile und instabile Bedingungen separate Funktionen dar. Für  $Ri = 0$  entsprechen

sich diese in ihrem Wert, jedoch nicht im Gradienten. Die lokale Bulk-Richardson Zahl ist definiert als

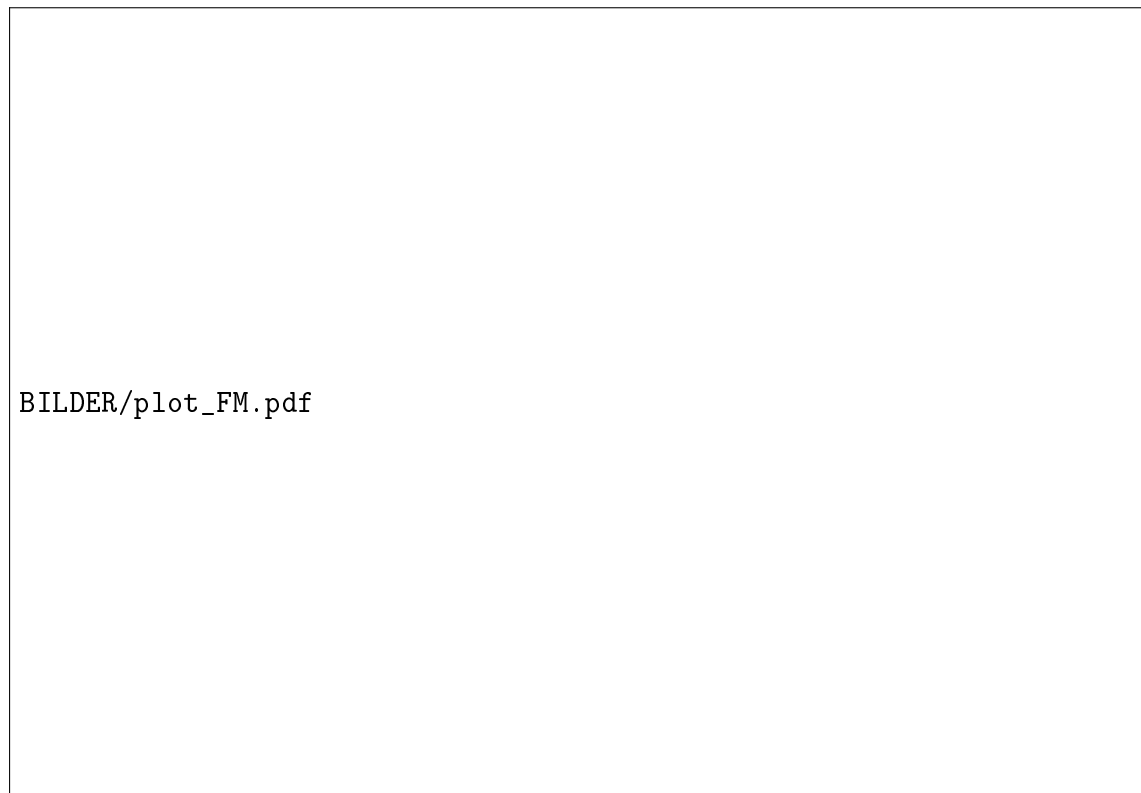
$$Ri = \frac{N^2}{S^2} . \quad (3.36)$$

Für den instabilen Fall,  $Ri < 0$ , nimmt man für die Stabilitätsfunktionen nun folgendes an:

$$F_m = (1 - 16Ri)^{1/2} , \quad F_h = (1 - 40Ri)^{1/2} Pr_N^{-1} , \quad (3.37)$$

Im stabilen Fall,  $0 \leq Ri \leq Ri_c$ , gilt

$$F_m = \left(1 - \frac{Ri}{Ri_c}\right)^4 , \quad F_h = \left(1 - \frac{Ri}{Ri_c}\right)^4 (1 - 1.2Ri) Pr_N^{-1} . \quad (3.38)$$



**Abb. 3.3:** Parametrische Funktionen  $F_m$  und  $F_h$  in Abhängigkeit der Bulk-Richardson Zahl  $Ri$ .

Abbildung 3.3 zeigt die Abhängigkeit der Parameterfunktionen in Bezug auf die atmosphärische Stabilität, welche über die Bulk-Richardson Zahl dargestellt wird. Je labiler die Atmosphäre ist desto größer sind die parametrischen Funktionen. Mit zunehmender Stabilität nähern sich diese Funktionen dem Wert Null. Bei Bulk-Richardson-Zahlen größer der kritischen Richardsonzahl  $Ri_c = 0.25$  sind die Funktionen Null gesetzt, d.h. bei hoher Stabilität kann sich keine Turbulenz mehr ausbilden. Für neutrale Schichtung hat man aus den „Kansas Daten“ (Izumi 1971) eine Prandtlzahl  $Pr_N = 0.7$  ermittelt. Eine Beziehung für die Längenskala erhält man nach Brown u. a. (1994):

$$\Lambda = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} f(a_1, a_2) . \quad (3.39)$$

Dabei entspricht die Funktion  $f(a_1, a_2)$  einem Korrekturfaktor für den Fall eines anisotropen Gitters (Scotti u. a. 1993). Hierbei sind  $a_1$  und  $a_2$  Verhältnisse der Gitterweiten des Modellgitters,

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_3} , \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} , \quad (3.40)$$

unter der Annahme, dass  $\Delta_1, \Delta_2$  und  $\Delta_3$  den Gitterabständen entsprechen und überall gilt  $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \Delta_3$ . Eine Abschätzung des Korrekturfaktors ergibt sich aus theoretischen Betrachtungen isotroper Turbulenz:

$$f(a_1, a_2) \simeq \cosh \left[ \frac{4}{27} \left( \ln^2 a_1 - \ln a_1 \ln a_2 + \ln^2 a_2 \right) \right]^{1/2} . \quad (3.41)$$

Im Fall eines isotropen Gitters ergibt sich der Faktor zu  $f = 1$ . Mit diesem Smagorinsky-SGS-Schema lassen sich nun  $\nu_m$  und  $\nu_h$  aus (3.34) bestimmen.

### 3.4.3. Turbulenzschema $k - \epsilon$

Zweigleichungsmodelle benutzen als Schließungsansatz die Lösung zweier gekoppelter Transportgleichungen. Die bekanntesten Gruppen dieser Modelle sind das  $k - \epsilon$  Turbulenzmodell und das  $k - \omega$  Turbulenzmodell. Letzteres Modell löst als zweite prognostische Gleichung eine Transportgleichung für die charakteristische Frequenz,

$\omega = c_\mu^{-1} \hat{\epsilon} \hat{k}^{-1}$ , der energiedissipierenden Wirbel. Im Folgenden wird jedoch nicht weiter auf das  $k - \omega$  Turbulenzmodell eingegangen.

Um eine empirische Vorgabe der Längenskala  $\lambda$  zu vermeiden, behilft man sich beim  $k - \epsilon$  Modell neben der prognostischen Gleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$  einer weiteren prognostischen Gleichung für die Dissipation  $\epsilon$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \hat{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \hat{u}_j \hat{k}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{\rho} \nu_m}{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{k} \right) + P_k - \bar{\rho} \hat{\epsilon} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \hat{\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \hat{u}_j \hat{\epsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{\rho} \nu_m}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\epsilon} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\hat{\epsilon}}{\hat{k}} P_\epsilon - c_{2\epsilon} \bar{\rho} \frac{\hat{\epsilon}^2}{\hat{k}} . \quad (3.43)$$

Auf der rechten Seite der Gleichungen (3.42) und (3.43) befinden sich die Terme für den turbulenten Transport, die Produktion ( $P_k, P_\epsilon$ ) und die Dissipation von turbulent kinetischer Energie  $k$  und deren Dissipation  $\epsilon$ . Bei Launder und Sharma (1974) findet man u.a. für das Standard  $k - \epsilon$  Modell die in Tabelle 3.3 dargestellten Konstanten.

$c_\mu$	$\sigma_k$	$c_{1\epsilon}$	$c_{2\epsilon}$
0.09	1.0	1.44	1.92

**Tabelle 3.2.:** Empirische Konstanten für das Standard  $k - \epsilon$  Modell nach Launder und Sharma (1974)

Für den Fall, dass Scherproduktion  $P_\epsilon$  gleich der Dissipation  $\hat{\epsilon}$  ist, d.h.  $P_\epsilon/\hat{\epsilon} = 1$ , dann ergibt sich nach (Burchard 2002) für die turbulente Schmidtzahl  $\sigma_\epsilon$  folgender Zusammenhang:

$$\sigma_\epsilon = \frac{\kappa^2}{c_\mu^{1/2} (c_{2\epsilon} - c_{1\epsilon})} \approx 1.111 . \quad (3.44)$$

Hierbei ist  $\kappa = 0.4$  die van-Karman Konstante. Die turbulente kinematische Viskosität  $\nu_m$  erhält man aus Dimensionsanalysen oder aus Analogie zur molekularen Viskosität als  $\nu_m \propto q_t \lambda$ . Die charakteristische Geschwindigkeitsskala  $q_t$  definiert sich

aus  $\hat{k}^{1/2}$  und die Längenskala  $\lambda$  erhält man aus der Beziehung  $\hat{k}^{3/2}/\hat{\epsilon}$ . Es ergibt sich somit für die dynamische Viskosität:

$$\nu_m = c_\mu \frac{\hat{k}^2}{\hat{\epsilon}}, \quad (3.45)$$

mit  $c_\mu$  als Proportionalitätskonstante.

### Wandgesetz

Das Wandgesetz, eher bekannt unter der englischen Bezeichnung *law of the wall*, ist eine idealisierte Form der Bewegungsgleichung, welche die Profile der Flüsse nahe einer Grenzfläche (Wand) mit hoher Genauigkeit reproduziert. Um diese Gleichungen zu erhalten geht man von den Bewegungsgleichungen für eine ungeschichtete, stationäre und nicht-rotierende Atmosphäre aus (Burchard 2002). In solch einer neutralen, trockenen Atmosphäre besitzt ein darin vertikal bewegtes Luftpaket immer die gleiche Temperatur wie seine Umgebung, sodass kein Archimedischer Auf- oder Abtrieb vorhanden ist. Die potentielle Temperatur bleibt demnach höhenkonstant und es ergibt sich für die Brunt-Väisälä-Frequenz  $N = 0 \text{ s}^{-1}$ . Es wird horizontale Homogenität und isotrope Turbulenz angenommen und es gilt für die TKE-Gleichung (3.42) ein lokales turbulentes Gleichgewicht, sodass

$$P_k = \hat{\epsilon}, \quad (3.46)$$

mit

$$P_k = \nu_m \bar{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \hat{u}) \right)^2. \quad (3.47)$$

Die Produktion von TKE setzt sich nun mehr nur noch aus der vertikalen Scheerung der Windkomponente  $u$  in  $x$ -Richtung zusammen und entspricht im Wert der Dissipation von TKE. Die  $k$ -Gleichung (3.42) ist somit eine Erhaltungsgleichung. In Abhängigkeit vom Abstand zur Wand lassen sich nun Funktionen finden, die das Vertikalprofil für den mittleren Wind sowie andere turbulente Größen beschreiben. Für die turbulente Längenskala ergibt sich ein proportionales Verhalten zu  $z$ :

$$\lambda = \kappa (z + z_0). \quad (3.48)$$

Mit der Beziehung für den Austauschkoeffizienten  $\nu_m$  aus (3.45), der Scherproduktion (3.47), der Dissipation nach (3.45) und der Bedingung  $\hat{u}(z=0) = 0$  erhält man dann folgende Profile für  $\hat{u}$ ,  $\hat{k}$ ,  $\hat{\epsilon}$  und  $\nu_m$ :

$$\hat{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} + 1 \right) , \quad (3.49)$$

$$\hat{k}(z) = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}} , \quad (3.50)$$

$$\hat{\epsilon}(z) = \frac{|u_*^3|}{\kappa(z+z_0)} , \quad (3.51)$$

$$\nu_m(z) = u_* \kappa (z+z_0) . \quad (3.52)$$

Mit (3.49) hat man nun das logarithmische Windgesetz, welches innerhalb der turbulenten atmosphärischen Grenzschicht unter neutralen Bedingungen gilt. Studien nach Burchard (2002) zufolge, sollten am unteren Rand des Modellgebietes Neumann'sche Randbedingungen für die Parametrisierung der TKE und ihre Dissipation bevorzugt werden. Im Gegensatz zu Dirichlet Randbedingungen erzeugen diese auch bei geringer vertikaler Auflösung am Boden ein logarithmisches Windprofil nahe der analytischen Lösung. Für die logarithmische ABL sehen die Neumann'schen Randbedingungen wie folgt aus:

$$\frac{\bar{\rho}\nu_m}{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} = 0 , \quad (3.53)$$

$$\frac{\bar{\rho}\nu_m}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \hat{\epsilon} = - (c_\mu)^{3/4} \frac{\bar{\rho}\nu_m}{\sigma_\epsilon} \frac{\hat{k}^{3/2}}{\kappa(z+z_0)^2} . \quad (3.54)$$

#### 3.4.4. Turbulenzschema $k-l$

Im folgenden wird ein Turbulenzschema vorgestellt, welches zwischen horizontalem und vertikalem Austausch von Turbulenz unterscheidet. Ziel dabei ist es dem Einfluss von Auftrieb und vertikalem Transport eine gewichtigere Rolle zuzuordnen. Dem zugrunde liegt das Turbulenzschema nach (Herzog u. a. 2003), welches im Rahmen dieser Arbeit als Turbulenzmodul in das ASAM eingebettet wurde und hier nach eben dieser Veröffentlichung hergeleitet wird.

Für den Reynold's Spannungstensor wird folgende Beziehung zu Grunde gelegt:

$$\tau_{ij} = -\nu_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \hat{u}_i) . \quad (3.55)$$

Der Tensor der turbulenten Viskosität  $\nu_{ij}$  wird häufig unter der Annahme vorherrschender Diagonalität und Isotropie betrachtet:

$$\nu_{ij} = \nu_m \delta_{ij} . \quad (3.56)$$

Von vorhergehenden Überlegungen wissen wir, dass für die kinematische Viskosität  $\nu_m$  Proportionalität zu einer turbulenten Längenskala  $\lambda$  und der Wurzel der turbulent kinetischen Energie  $\hat{k}$  vorherrscht, also

$$\nu_m = c_k \lambda \sqrt{\hat{k}} , \quad (3.57)$$

mit  $c_k$  als empirische Konstante. Im Allgemeinen ist der zweidimensionale Tensor  $\nu_{ij}$  nur dann diagonal, wenn das Koordinatensystem identisch zu den Hauptachsen gewählt ist. Die Wahl der Hauptachsen muß dabei unabhängig vom Ort sein, da die dynamischen Gleichungen in jedem Punkt des Raumes gültig sind. Für atmosphärische Prozesse kann die vertikale Achse als eine Hauptachse angesehen werden. Eine weitere Hauptachse wird durch die Richtung des horizontalen Windes repräsentiert. Allerdings kann aufgrund der zeitlichen und örtlichen Variation der Windrichtung keine Unterscheidung zwischen den horizontalen Achsen vorgenommen werden. Experimente durch Monin und Yaglom (1971) haben gezeigt, dass es ausreichend ist  $\nu_{ij}$  als Diagonalmatrix zu betrachten:

$$\nu_{ij} = \nu_m \delta_{ij} = \nu_k . \quad (3.58)$$

Folglich wird  $\nu_{ij}$  als diagonal angenommen, jedoch unterscheidet man die Austauschkoefizienten in Horizontal- und Vertikalkomponente:

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_{hor} = c_k \lambda \sqrt{3/2 \hat{k}_{hor}} , \quad (3.59)$$

$$\nu_3 = \nu_{ver} = c_k \lambda \sqrt{3 \hat{k}_{ver}} . \quad (3.60)$$

Die TKE nach Horizontal- und Vertikalkomponente differenziert ergibt:

$$\hat{k}_{hor} = \widehat{u_1''u_1''} + \widehat{u_2''u_2''}, \quad (3.61)$$

$$\hat{k}_{ver} = \widehat{u_3''u_3''}. \quad (3.62)$$

Für den Fall lokaler Isotropie  $\widehat{u_1''u_1''} = \widehat{u_2''u_2''} = \widehat{u_3''u_3''} = 1/3\hat{k}$  sind (3.59) und (3.60) gleich der klassischen Formulierung (3.57).

Unter Vernachlässigung der molekularen Diffusion erhält man folgende Gleichungen für die horizontale (3.61) und vertikale Komponente (3.62) der TKE:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\hat{k}_{hor}) &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}\hat{u}_j\hat{k}_{hor}) && \text{Advektion} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} c_1\bar{\rho}\nu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{k}_{hor} && \text{turbulente Diffusion} \\ &+ 2\bar{\rho}\nu_j \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_1 \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_2 \right) \right] && \text{Produktion durch Windscherung} \\ &- c_2\bar{\rho} \frac{\sqrt{\hat{k}}}{\lambda} \left( \hat{k}_{hor} - \frac{2}{3}\hat{k} \right) && \text{Redistribution} \\ &- c_3\bar{\rho} \frac{\sqrt{\hat{k}}}{\lambda} \hat{k}_{hor} && \text{Dissipation.} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\hat{k}_{ver}) &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}\hat{u}_j\hat{k}_{ver}) && \text{Advektion} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} c_1\bar{\rho}\nu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{k}_{ver} && \text{turbulente Diffusion} \\ &+ 2\bar{\rho}\nu_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{u}_3 \right)^2 && \text{Produktion durch Windscherung} \\ &- 2g\text{Pr}^{-1}\nu_3 \frac{1}{\hat{\theta}} \frac{\partial}{\partial z} \hat{\theta} && \text{Produktion durch Auftrieb} \\ &- c_2\bar{\rho} \frac{\sqrt{\hat{k}}}{\lambda} \left( \hat{k}_{ver} - \frac{1}{3}\hat{k} \right) && \text{Redistribution} \\ &- c_3\bar{\rho} \frac{\sqrt{\hat{k}}}{\lambda} \hat{k}_{ver} && \text{Dissipation.} \end{aligned} \quad (3.64)$$



mit der inversen Prandtlzahl  $Pr^{-1}$ . Die turbulenten Austauschkoefizienten  $\nu_j$  werden nach Gleichung (3.59) berechnet.

### Turbulente Längenskala

Die turbulente Längenskala ist eine charakteristische Längenskala von Wirbeln in einer turbulenten Strömung. Folglich stellt die turbulente Längenskala  $\lambda$ , in Abwesenheit von Quellen und Senken, eine konservative Größe dar. Es ist üblich, dass diese lokal diagnostisch bestimmt wird. Da das Verständnis der Produktion und Dissipation der turbulenten Längenskala noch sehr unsicher ist (Lewellen 1977), wird eine Formulierung angewendet, bei der die Produktion durch eine Abweichung zu einer Gleichgewichtslängenskala angetrieben wird:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \hat{\lambda}) &= - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \hat{u}_k \hat{\lambda}) && \text{Advektion} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_k} c_1 \bar{\rho} \nu_k \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\lambda} && \text{turbulente Diffusion} \\
 &- c_2 \bar{\rho} \frac{\sqrt{\hat{k}}}{\hat{\lambda}} (\hat{\lambda} - \lambda_0) && \text{Gleichgewichtsterm,} \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

mit

$$\lambda_0 = \min(0.67z, \Delta s, \lambda_0^*) ,$$

$$\lambda_0^* = 0.54 \sqrt{\frac{\hat{k}}{N^2}} ,$$

$$\Delta s = (\Delta x + \Delta y + \Delta z)/3 ,$$

sowie dem Quadrat der Brunt-Väisälä Frequenz  $N^2$  nach (2.27). Die turbulente Längenskala des Gleichgewichtes  $\lambda_0$  wird durch den Abstand  $z$  zum Erdboden und durch die mittlere Auflösung  $\Delta s$  des numerischen Gitters begrenzt. Für eine stabil geschichtete Atmosphäre, d.h.  $N^2 > 0$ , wird die turbulente Längenskala des Gleichgewichtes nach Deardorff (1980) verwendet.

## Empirische Konstanten

Empirische Konstanten werden durch eine Vielzahl an Messungen bestimmt. Herzog u. a. (2003) bezieht sich in seiner Wahl der Konstanten auf die Messungen von Dickey und Mellor (1980) (vgl. Tabelle 3.3). Unter Hinzunahme anderer empirisch erhaltener Konstanten bietet sich hier die Möglichkeit das Turbulenzmodell zu modifizieren. Bis auf weiteres habe ich jedoch die in Tabelle 3.3 aufgeführten Konstanten im ASAM verwendet.

$c_k$	$c_1$	$c_2$
0.32	0.80	0.43

**Tabelle 3.3.:** Empirische Konstanten für das Turbulenzmodell nach Dickey und Mellor (1980)

Zudem haben Dickey und Mellor (1980) in ihren Messungen herausgefunden, dass eine Zunahme der Stabilität reduzierend auf die effektive Dissipation der TKE wirkt. Aufgrund dessen wird das Verhältniss der turbulenten Längenskala zur mittleren Auflösung des Gitters hinzugenommen, welches als dimensionslose Quantität den Einfluss der Stabilität auf die Turbulenz beschreibt (Deardorff 1980):

$$c_3 = 0.067 + 0.18 \frac{\hat{\lambda}}{\Delta s}. \quad (3.66)$$

In Fällen wie z.B. einer Ausbreitungsrechnung infolge einer vulkanischen Eruption, dargestellt in Herzog u. a. (2003), darf der Transport durch Wellen mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit im Bereich von Schallwellen nicht vernachlässigt werden. In unserem Fall bleibt die Gültigkeit der Annahme von der Vernachlässigbarkeit der Druckkorrelationen  $\overline{u'_i P'}$  und dem Vorkommen turbulenter Dichte-Fluktuationen einzig im Auftriebsterm bestehen.

## 3.5. Oberflächenparametrisierung

### 3.5.1. Louis Schema

Louis (1979) veröffentlichte ein Modell zur Parameterisierung der vertikalen turbulenten Flüsse für Reibung, Wärme und Feuchte. In Erfüllung der Monin-Obukhov'schen

Ähnlichkeitstheorie werden die Oberflächenflüsse für Impuls und sensible Wärme berechnet. Ausgangspunkt dafür ist die Bulk-Richardson-Zahl der Oberfläche als ein unabhängiger Parameter. Diese kompakte Methode ist weitverbreitet und findet in einigen Modellen teilweise modifiziert Anwendung (Uno u. a. 1995; Wai und Smith 1995; Lenderink und Holtslag 2004).

Ursprünglich wurde dieses Schema für Mittelfrist-Modelle entwickelt, sodass man für die Rauigkeitslängen des Impulses  $z_0$  und der Wärme  $z_T$  Gleichheit angenommen hat, also  $z_0 = z_T$ , und dass  $z/z_0 \gg 1$ . Nach Louis kann man die Flüsse für Impuls und Wärme dann wie folgt ausdrücken:

$$u_*^2 = \frac{\kappa^2}{(\ln z/z_0)^2} U^2 F_m(z/z_0, Ri) , \quad (3.67)$$

$$u_* \theta_* = \frac{\kappa^2}{(\ln z/z_0)^2} \frac{1}{R} U \Delta \theta_0 F_h(z/z_0, Ri) , \quad (3.68)$$

mit der Windgeschwindigkeit  $U$ , der turbulenten Prandtl-Zahl  $R = 0.74$  (Uno u. a. 1995) und der vertikale Differenz der potentiellen Temperatur  $\Delta \theta_0 = \theta - \theta_0$  bezüglich der Rauigkeitslänge des Impulses  $z_0$ . Die Größen  $F_m$  und  $F_h$  bezeichnen parametrische Funktionen in Abhängigkeit von  $z/z_0$  und der Bulk-Richardson-Zahl  $Ri$ :

$$F_i = 1 - \frac{b Ri_B}{1 + c_i |Ri|^{1/2}} \quad \text{instabiler Fall } Ri < 0 \text{ mit } b = 9.4 \quad (3.69)$$

( $i = m$  für Impuls und  $i = h$  für Wärme) und

$$F_m = F_h = \frac{1}{(1 + b' Ri)^2} \quad \text{stabiler Fall } Ri \geq 0 \text{ mit } b' = 4.7 , \quad (3.70)$$

mit

$$c_i = d_i \frac{\kappa^2}{(\ln z/z_0)^2} b \left( \frac{z}{z_0} \right)^{1/2} \quad (d_m = 7.4 \text{ und } d_h = 5.3) \quad (3.71)$$

und der Bulk-Richardson-Zahl

$$Ri = \frac{gz \Delta \theta_0}{\bar{\theta} U^2} . \quad (3.72)$$

Die ursprüngliche Methode nach Louis setzt die potentielle Temperatur  $\theta_0$  bei  $z = z_0$  gleich der potentiellen Temperatur am Boden, was jedoch nur für sehr glatte Oberflächen der Fall ist. Zudem wurde wie erwähnt  $z_0 = z_T$  gesetzt, eine Annahme die für rauhe Oberflächen im Bereich mesoskaliger Modellierung hinfällig ist (Uno u. a. 1995).

### Erweiterte Methode

Da die Parametrisierung nach Louis (1979) im Fall hochaufgelöster Simulationen so nicht mehr eingesetzt werden kann, liefert Uno u. a. (1995) eine Erweiterung dieses Schemas. Besonderes Augenmerk wird auf die potentielle Temperatur am Boden gelegt. Man differenziert zwischen den Rauheitslängen für Impuls und Wärme. Die Gleichungen für die Oberflächenflüsse (3.67) und (3.68) sind demnach

$$u_*^2 = \frac{\kappa^2}{(\ln z/z_0)^2} U^2 G_m(z/z_0, Ri) \equiv C_D U^2, \quad (3.73)$$

$$u_* \theta_* = \frac{\kappa^2}{(\ln z/z_0)(\ln z/z_T)} \frac{1}{R} U \Delta\theta_T G_h(z/z_0, z/z_T, Ri) \equiv C_H U \Delta\theta_T, \quad (3.74)$$

mit  $\Delta\theta_T = \theta - \theta_T$  ( $\theta_T$  ist die potentielle Temperatur bei  $z = z_T$ ). Es gilt die Annahme, dass die potentielle Temperatur  $\theta_T$  gleich der potentiellen Temperatur am Boden  $\theta_s$  ist. Mit  $G_m$  und  $G_h$  hat man parametrische Funktionen in Abhängigkeit von Rauigkeit und atmosphärischer Stabilität. Für die Bulk-Richardson-Zahl bedeutet dies eine zusätzliche Abhängigkeit vom Wärmefluss:

$$Ri = Ri_T \left[ \frac{R \ln\left(\frac{z_0}{z_T}\right)}{\Psi_{h,0}} + 1 \right]^{-1}, \quad (3.75)$$

mit einer Funktion  $\Psi_{h,0}$ , die von den parametrischen Funktionen  $F_m$  und  $F_h$  abhängt:

$$\Psi_{h,0} = R \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \frac{\sqrt{F_m}}{F_h}. \quad (3.76)$$

Mithilfe eines Zweischnitt-Verfahren, einer nicht-iterativen Prozedur, wird nun die neue Bulk-Richardson-Zahl berechnet. Basierend auf dieser werden im folgenden die parametrischen Funktionen  $F_m$  und  $F_h$ , sowie  $\Psi_{h,0}$  neu berechnet. Daraus lassen

---

sich dann die Oberflächenflüsse  $u_*$  und  $u_*\theta_*$  nach (3.67) und (3.68) und deren Bulk-Transfer-Koeffizienten  $C_D$  und  $C_H$  bestimmen nach (3.73) und (3.74).



# 4. Modellrechnungen

## 4.1. Neutrale Grenzschicht

Den an die Erdoberfläche grenzenden, unteren Teil der Atmosphäre nennt man planetare Grenzschicht (*Planetary Boundary Layer*, PBL) oder auch atmosphärische Grenzschicht (*Atmospheric Boundary Layer*, ABL). Diese erstreckt sich, je nach Wind- und Temperaturverhältnissen, von einigen 100 m bis zu 5 km. Besonders kennzeichnend für die PBL ist eine starke räumliche und zeitliche Änderung der meteorologischen Felder. In der PBL finden Austauschprozesse zwischen der darüberliegenden freien Atmosphäre und der Erdoberfläche statt. Zu diesen Vorgängen gehören der Austausch von Energie in Form von latenter und fühlbarer Wärme, der Austausch von Strahlungsflüssen und der Impulsaustausch. In Bezug auf den Impuls lässt sich die PBL in drei Schichten unterteilen. Direkt über dem Boden findet man die laminare Grenzschicht mit einer sehr geringen vertikalen Ausdehnung von ein paar Zentimetern. In ihr findet eine Wärmeübertragung mittels Wärmeleitung zwischen Erdoberfläche und turbulenter Atmosphäre statt. An die laminare Grenzschicht schließt sich die Prandtlschicht an, in der sämtliche turbulenten Flüsse annähernd höhenkonstant sind. Diese erstreckt sich vertikal bis zu 100 m. Die darüberliegende Ekman-schicht ist durch eine reibungsinduzierte Winddrehung und Windzunahme mit der Höhe gekennzeichnet. Aufgrund starker thermischer Beeinflussung und starker vertikaler Windscherung herrscht eine turbulente Luftströmung vor, sodass die turbulenten Flüsse nicht mehr als höhenkonstant angesehen werden können. Die Obergrenze der Ekman-schicht repräsentiert gleichzeitig die Obergrenze

der planetaren Grenzschicht und ist mit einem Temperatursprung und einer darüberliegenden stabilen Schichtung gekennzeichnet.

### 4.1.1. Vertikalprofil

Für die Turbulenzschemata  $k - \epsilon$ ,  $k - l$  und SGS wurden Modellläufe einer neutral geschichteten Atmosphäre initiiert, d. h.  $N = 0 \text{ s}^{-1}$ . Das Modellgebiet entspricht einer Säule mit einer vertikalen Erstreckung von 1500 m bei einer vertikalen Gitterweite von  $\Delta z = 10 \text{ m}$  und einer horizontalen Grundfläche von  $1000 \times 1000 \text{ m}^2$ . Die Randbedingungen in horizontaler Richtung wurden periodisch gesetzt und am Boden sowie dem Modelloberrand wurden *freelip* Bedingungen verwendet. Zur Erfüllung der Ausstrahlungsbedingung befindet sich am Modelloberrand noch eine Dämpfungsschicht, deren Mächtigkeit 50 m beträgt. Mit einer Anströmgeschwindigkeit von  $u = 25 \text{ ms}^{-1}$  wird eine homogene Fläche mit einer Rauigkeitslänge  $z_0 = 0.1 \text{ m}$  überströmt. Damit das System genug Zeit zum einschwingen hat, wurde eine Modelllaufzeit von  $t_{max} = 24 \text{ h}$  bei einer maximalen Schrittweite  $\Delta t_{max} = 10 \text{ s}$  festgesetzt. Effekte basierend auf dem aerodynamischen Auftrieb erübrigen sich aufgrund der neutralen Temperaturschichtung. Der Corioliseffekt wurde vernachlässigt sowie der mittlere Geschwindigkeitsbetrag der Nord-Süd Komponente. Der Betrag des Vertikalwindes wurde zu Beginn zu Null gesetzt. Man erwartet, dass sich die Vertikalprofile entsprechend der Gleichungen (3.49)-(3.52) einstellen.

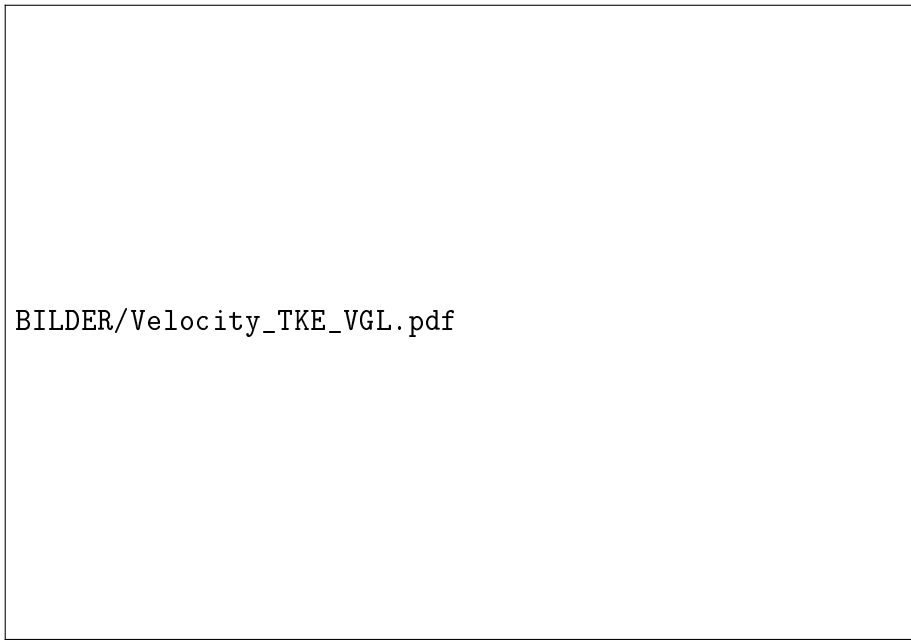
Die Abbildung 4.1 zeigt die Profile für den mittleren Windgeschwindigkeitsbetrag (*a*) und den Diffusionskoeffizienten (*b*) bei zugrundeliegendem Turbulenzschema  $k - \epsilon$ ,  $k - l$  und SGS. Dabei werden im oberen Teil der Abbildung jeweils die Absolutwerte dargestellt und darunter das dazugehörige Verhältnis der Größe zum analytischen Vertikalprofil einer neutralen Atmosphäre (vgl. (3.49)-(3.52)) bei einer Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_* = 1.0 \text{ ms}^{-1}$  und einer Rauigkeitslänge  $z_0 = 0.1 \text{ m}$ . Für den Horizontalwind zeigt sich beim  $k - \epsilon$  und  $k - l$  Schema ein Vertikalprofil, das sehr nah an dem logarithmischen Windprofil liegt. Lediglich innerhalb der ersten zwei Gitterzellen am Boden, d. h. bis zu einer Höhe von 20 m, erfolgt eine positive Abweichung von (10 – 12) %, der mit zunehmender Höhe eine rasche Annäherung an das theoretische Vertikalprofil folgt. Diese Angleichung ist beim  $k - \epsilon$  Schema stärker ausgeprägt und schlägt sogar in eine Unterschätzung von  $\approx 1 \%$  um. Das  $k - l$  Schema nach Herzog u. a. (2003) hingegen bleibt bei einem konsequent



erhöhten Horizontalwind. Am Modelloberrand zeigt sich bei beiden Schemata eine Überschätzung des Horizontalwindes um 4 %. Eine mögliche Ursache dafür kann eine zu geringe Auflösung der bodennahen PBL sein. Mit einer höheren Auflösung könnte man der Fehler durch die Parametrisierung der Flüsse am Boden minimieren werden. Es würde sich dann auch ein Profil einstellen, welches zum Boden hin zu Null geht (Burchard 2002)

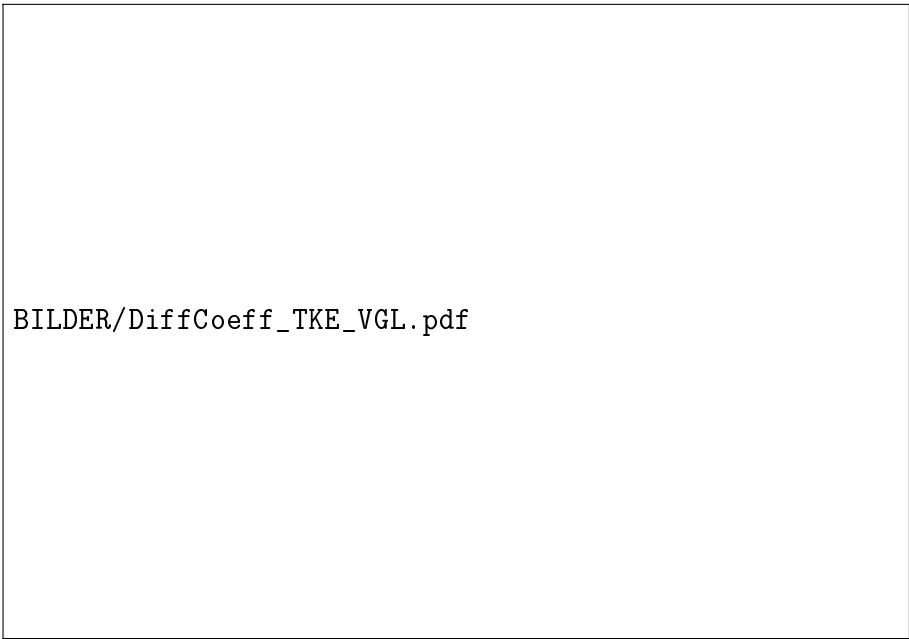
Das SGS-Schema erzeugt kein logarithmisches Windprofil. Mit Abweichungen bis zu 35 % kann die Theorie vom neutralen Fall für das Windprofil nicht wiedergegeben werden. Mit dem SGS-Schema erhält man einen konsequent niedrigeren Windgeschwindigkeitsbetrag im Vergleich zum logarithmischen Windprofil der neutralen Atmosphäre. Ausschlaggebend dafür ist ein Diffusionskoeffizient, dessen Vertikalprofil höhenkonstant ist. Folgt man Gleichung (3.52), so sollte sich jedoch für den Diffusionskoeffizienten ein linear zunehmendes Vertikalprofil einstellen. Für solch ein Profil ist der Impulsfluss zum Boden hin abnehmend, d.h die turbulente Durchmischung der Atmosphäre nimmt in Bodennähe ab. Für einen höhenkonstanten Diffusionskoeffizient hingegen wird die Atmosphäre gleichmäßig durchmischt, sodass jede Schicht den gleichen Eintrag an Impuls aus der Hintergrundströmung erhält. Es stellt sich somit keine logarithmische Abnahme des Windes zum Boden hin ein. Der Wind nimmt nur schwach mit der Höhe zu und wird dann aufgrund der numerischen Dämpfungsschicht am Modelloberrand auf den Wert der Hintergrundströmung von  $u = 25 \text{ ms}^{-1}$  herangezogen.

Eben dieser Einfluss des Diffusionskoeffizienten auf das Windprofil führt auch bei den Turbulenzschemata  $k-\epsilon$  und  $k-l$  zu einer Abweichung der Windgeschwindigkeit vom logarithmischen Windprofil. Die schon erwähnte Überschätzung im bodennahen Bereich resultiert aus einem erhöhten Diffusionskoeffizienten am Boden. Es wird folglich mehr Impuls aus höheren Schichten zum Boden transportiert, was sich in einer erhöhten Windgeschwindigkeit bemerkbar macht. Der Umkehreffekt wird am Modelloberrand sichtbar, wofür die Dämpfungsschicht verantwortlich ist.



BILDER/Velocity\_TKE\_VGL.pdf

(a) Vertikalprofil Geschwindigkeit  $u$



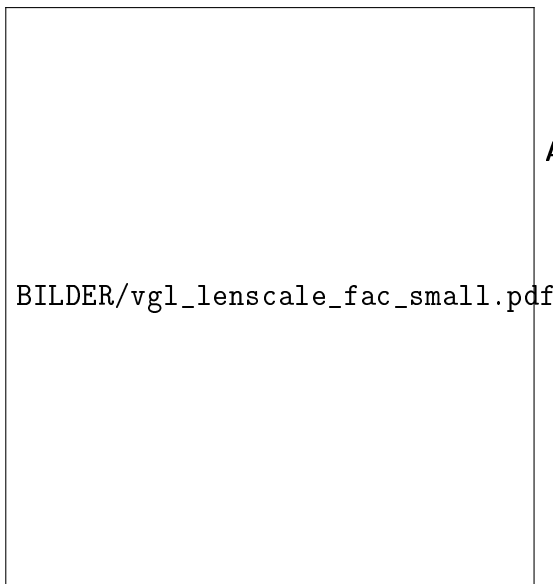
BILDER/DiffCoeff\_TKE\_VGL.pdf

(b) Vertikalprofil Diffusionskoeffizient  $\nu$

**Abb. 4.1:** Vertikalprofile einer neutral geschichteten Atmosphäre unter Verwendung unterschiedlicher Turbulenzschemata  $k - \epsilon$ ,  $k - l$  und SGS, mit einer Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_* = 1 \text{ ms}^{-1}$  und einer Rauigkeitslänge  $z_0 = 0.1 \text{ m}$ , sowie deren Verhältnis zu dem analytisch berechneten Vertikalprofil.

### 4.1.2. Turbulente Längenskala

Basierend auf der numerischen Gitterweite des Modells wird die turbulente Längenskala bestimmt. Die Wahl der genauen Skalierung der Längenskala ist z. Zt. noch ungeklärt. Fakt ist, dass das Turbulenzschema sehr sensitiv auf eine Änderung der turbulenten Längenskala (3.39) reagiert. Die Längenskala geht in die Berechnung der TKE und des Diffusionskoeffizienten ein. Wie erwähnt, kennzeichnet der Diffusionskoeffizient den Impulsfluss. Er hat somit bedeutenden Einfluss auf die Entstehung von Turbulenz, insbesondere am Boden. Mit der turbulenten Längenskala lassen sich die Modellergebnisse wesentlich modifizieren.

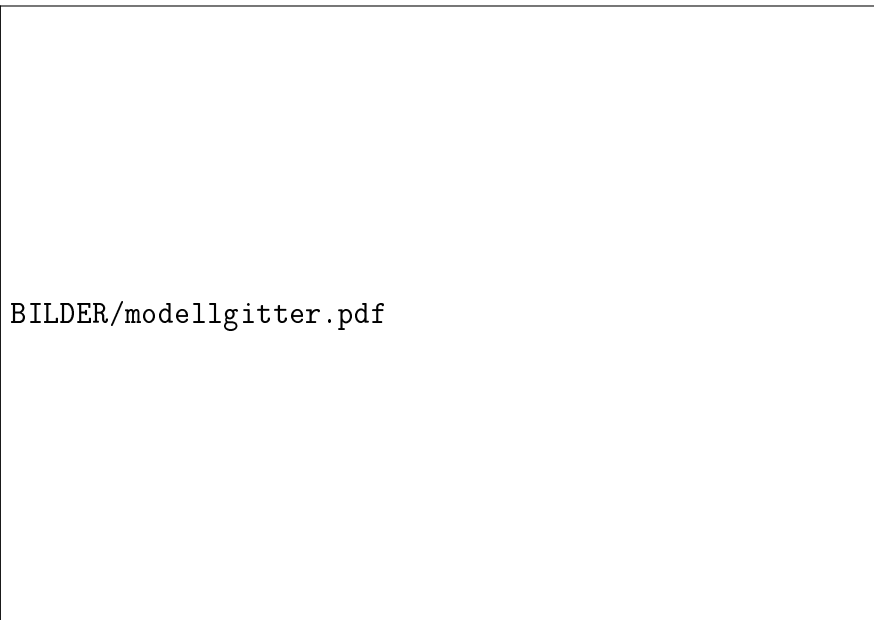


**Abb. 4.2:** Vertikalprofil des horizontalen Windgeschwindigkeitsbetrages  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) und des Diffusionskoeffizienten für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) für unterschiedlich Skalierung der Längenskala  $\Lambda$  mit 0.25; 0.50; 0.75; 1.00 und 1.25

Die Abbildung 4.2 verdeutlicht dies, indem der neutrale Fall mit dem SGS-Schema unter Verwendung unterschiedlich stark skalierten Längenskalen gerechnet wurde. Man erkennt bei größeren Längenskalen eine Zunahme des Diffusionskoeffizienten. Folglich erhält man einen größeren Eintrag an turbulent kinetischer Energie, die sich mit der Dissipation von Energie mittels Reibung am Boden versucht auszugleichen. Die Windgeschwindigkeit nimmt infolgedessen weniger stark zum Boden hin ab. Mit einem Vorfaktor gleich eins entspricht die Rechnung der durch Herzog u. a. (2002) veröffentlichten Turbulenzparametrisierung, welche ebenfalls als durchgezogene Linie in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Die Frage, mit welcher Skalierung die Längenskala versehen werden muss, bleibt noch offen und konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden.

## 4.2. Agnesi-Berg

Im Folgenden werden Modellläufe vorgestellt, denen eine Überströmung eines idealisierten Gebirges in Form der Funktion nach Agnesi (vgl. Abb. 2.2) zu Grunde liegt. Um einen Eindruck über die Qualität der Ergebnisse zu erhalten, wurden im Zuge der Vergleichbarkeit das Modellgebiet und die Ausgangsparameter entsprechend denen nach Doyle und Durran (2002) gewählt. Das zweidimensionale Modellgebiet umfasst eine Länge von 289 km in Strömungsrichtung mit einer Auflösung von 100 m. Bei einer Entfernung von 150 km vom Einströmrand befindet sich das Maximum vom Bergrücken, dessen Halbwertsbreite für alle Modellläufe  $b = 10$  km beträgt. Mit einer vertikalen Auflösung von 50 m erstreckt sich das Rechengebiet bis in eine Höhe von 14 km. Für die Randbedingungen in Strömungsrichtung wird im Westen eine Einström- und im Osten eine Ausströmbedingung genutzt, die jeweils mit einer 30 km mächtigen Dämpfungsschicht abschließen (vgl. Abb. 4.3). In Nord-Süd-Richtung wurden die Ränder aufgrund der Zweidimensionalität periodisch gesetzt. Die Ausstrahlungsbedingung, d. h. Wellen können nur aus dem Modellgebiet hinauslaufen, erfüllt man mittels einer weiteren Dämpfungsschicht von 6 km am Oberrand. Ein Einfluss der Corioliskraft wurde für alle Berechnungen ausgeschlossen.



**Abb. 4.3:** Schematische Darstellung des Modellgebietes

### 4.2.1. Modellvergleich

Doyle und Durran (2002) untersuchten die Dynamik gebirgsinduzierter Rotoren anhand einer Serie hochaufgelöster 2D-Simulationen mit dem nicht-hydrostatischen Modell COAMPS der Naval Forschungseinrichtung. Ein Aspekt deren Forschung stellte die Interaktion der gefangenen Schwerewellen im Lee des Gebirges mit der Bodengrenzschicht dar. Mit einer Anströmgeschwindigkeit von  $u = 25 \text{ ms}^{-1}$  aus westlicher Richtung wird der Agnesi-Berg überströmt. Die Atmosphäre wird mittels eines einfachen Zweischichtmodells approximiert, dessen Schichten jeweils durch eine konstante Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$  gekennzeichnet sind. Das Interface in einer Höhe  $H_i = 3000 \text{ m}$  trennt die untere Schicht mit  $N_l = 0.025 \text{ s}^{-1}$  von der darüberliegenden Schicht mit  $N_u = 0.01 \text{ s}^{-1}$ . Durch diese Diskontinuität kann sich die gebirgsinduzierte Schwerewelle nur innerhalb der unteren Schicht zwischen Boden und  $H_i$  ausbreiten. Basierend auf dem Prinzip der Totalreflexion erhält man eine gefangene Schwere- bzw. Leewelle.

Zur Verdeutlichung des Einflusses der Reibung am Boden unterscheidet man zwei Fälle: zum einen den Fall ohne Reibung *freelip* und zum anderen den mit Reibung *noslip*. Um eine möglichst gut kontrollierte Vergleichbarkeit der beiden Fälle zu erhalten, wurde im Fall *noslip* die Bodenrauigkeit linear an einen Maximalwert angeglichen. Diese lineare Angleichung setzt ab einer bestimmten Entfernung vor dem Bergrücken ein, die gleich der zweifachen Halbwertsbreite des Berges ist. Davor nimmt man *freelip* Bedingungen an. Ab einer Entfernung von einer Halbwertsbreite vor dem Bergrücken liegt die maximale Bodenrauigkeit mit  $z_0 = 0.1 \text{ m}$  vor. Mit diesem Übergang von *freelip* zu *noslip* konzentriert man den Bereich höchsten Reibungswiderstandes auf den Bereich hoher Windgeschwindigkeiten im Lee des Gebirges. Für den Austausch vertikal turbulenter Flüsse des horizontalen Impulses zwischen Boden und erster Gitterzelle wurde im Rahmen dieser Arbeit in das ASAM die Formulierung nach Louis (1979) und Uno u. a. (1995) implementiert.

Die Abbildung 4.4 verdeutlicht den Einfluss der Bodenrauigkeit auf die gebirgsinduzierten Störungen. Dargestellt ist die potentielle Temperatur als Ergebnis der Modellberechnungen für den Fall *freelip* a), c) und e) sowie die für *noslip* b), d) und f). Die Grafiken a) und b) sind aus der Veröffentlichung von Doyle und Durran (2002) und haben das Modell COAMPS als Grundlage. Die Ergebnisse der Modellierung mit ASAM sind in c) und d) dargestellt. Zusätzlich wurden Rechnungen

mit dem WRF durchgeführt, das ebenso auf geländefolgenden Koordinaten basiert wie COAMPS. Die Ergebnisse der Berechnungen mit WRF sind in e) und f) abgebildet. Die Schließung der Turbulenz im ASAM erfolgt nach dem SGS-Schema von Herzog u. a. (2002) analog zum WRF, was für diese zwei Modelle die Vergleichbarkeit verbessert. Die Integrationszeit betrug bei COAMPS und WRF je 3h. Bei den Berechnungen mit ASAM stellt sich der quasistationäre Zustand schon nach einer Zeit  $t = 2$  h ein. Der maximale Integrationsschritt  $\Delta t$  beim ASAM sowie der feste Integrationsschritt  $\Delta t$  beim WRF wurden auf eine Sekunde gesetzt. Die Initialisierung der Modelle basiert auf unterschiedlichen Vorgehensweisen. So sind die Anfangsbedingungen für die Schwerebeschleunigung und für das Windprofil des Horizontalwindes beim COAMPS durch eine beständige Zunahme von Null auf deren spezifischen Anfangswert gekennzeichnet (Doyle und Durran 2002), wohingegen bei ASAM und WRF diese mit Start der Simulation als feste Werte vorliegen.

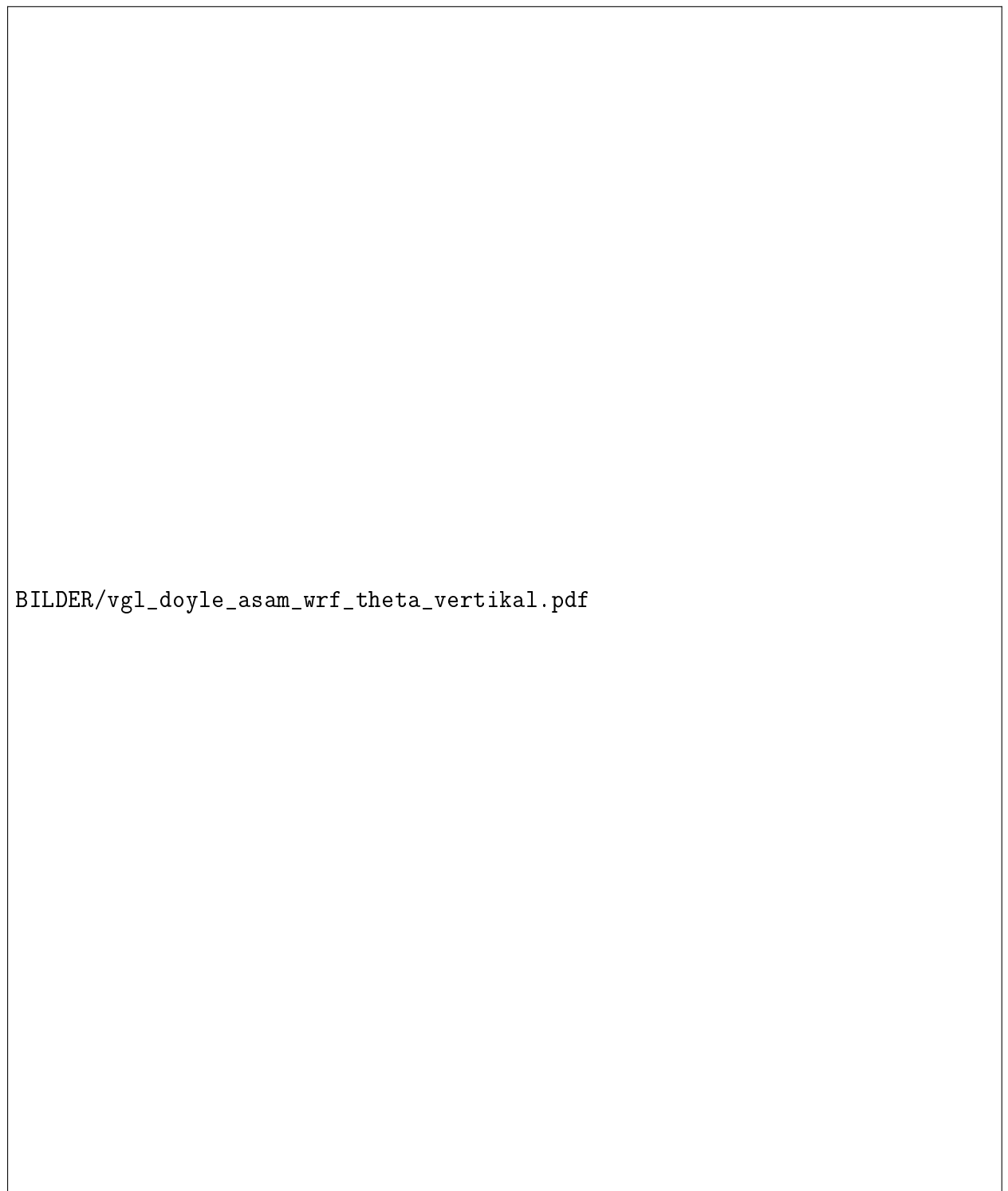
### Gefangene Leewellen

Allen Modellen gemein, ist ein sich im Lee befindlicher Bereich starker Überströmung für den *freelip* Fall. Diese Überströmung resultiert in einer quasistationären gefangenen Schwerewelle mit großen Amplituden. Unter reibungsbehafteter Überströmung fällt diese Ausprägung der Wellenamplitude schon sehr viel schwächer aus und die Entstehung der Welle setzt sehr viel näher am Bergmaximum ein. Obwohl die Modelle in diesen Punkten übereinstimmen, unterscheiden sie sich wesentlich bezüglich des Entstehungsortes der Schwerewelle. Am offensichtlichsten ist dies im *freelip* Fall, wo ASAM und WRF das erste Maximum der Welle näher zur Bergmitte reproduzieren, als es durch COAMPS simuliert wird. Mit einer Entfernung von 25 km zum Bergmaximum setzt die Entstehung der Welle bei der Modellierung mit ASAM bereits auf fast der Hälfte der Entfernung ein, die das COAMPS modelliert. Weniger nah zum Berg, jedoch signifikant verschieden zum Entstehungsort beim COAMPS, bildet sich die Welle beim WRF rund 30 km nach dem Bergmaximum aus. Die Differenzen in den Ergebnissen von ASAM und COAMPS könnten durch die Wahl des Koordinatensystems verursacht worden sein. Jedoch widersprechen dem die Rechnungen mit dem WRF, dem ebenso wie COAMPS geländefolgende Koordinaten zu Grunde liegen. Man kann gewisse Unterschiede aufgrund unterschiedlicher

Koordinatensysteme nicht verneinen, jedoch stellt sich hier deren Ursächlichkeit als gering heraus.

Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung unterschiedlicher Advektionsverfahren. So basiert die Rechnung mit dem WRF auf der Verwendung eines *Upwind*-Schemas für die horizontale Advektion in 5. Ordnung und eines in 3. Ordnung für die vertikale Advektion. Im ASAM ist das Advektionsschema 3. Ordnung vom WRF für die gesamte dreidimensionale Transportrechnung implementiert, als ein sogenanntes 1/3-Schema. Zur Vermeidung von Oszillationen an Diskontinuitäten oder scharfen Gradienten des Modellgebietes aufgrund des hoch aufgelösten Diskretisierungsschemas, kommt noch ein *Flux limiter* nach Sweby (1984) zum Einsatz. Das COAMPS unterscheidet ebenso wie das WRF in horizontale und vertikale Advektion, verwendet jedoch für die horizontale Advektion ein Schema 4. Ordnung und für die vertikale Advektion eines mit 2. Ordnung. Die dabei entstehenden nicht-linearen Instabilitäten werden mittels einer *Hyper*-Diffusionsmethode der 4. Ordnung herausgefiltert.

Zur Untersuchung des Einflusses der verwendeten Advektionsschemata wurden weitere Rechnungen mit WRF angestellt. Dabei zeigten sich bei der Konfiguration entsprechend der vom COAMPS starke nicht-lineare Instabilitäten, die aufgrund des Fehlens eines geeigneten Filters entstehen konnten. Interessant wird es bei der Verwendung eines Schemas 3. Ordnung gleich dem im ASAM. Die Ergebnisse, die hier nicht dargestellt sind, weichen nicht im geringsten von denen ab, die in Abbildung 4.4 und 4.5 für das WRF dargestellt sind. Somit muss die Annahme, die Modell-differenzen liegen im angewandten Advektionsschema begründet, in Frage gestellt werden.



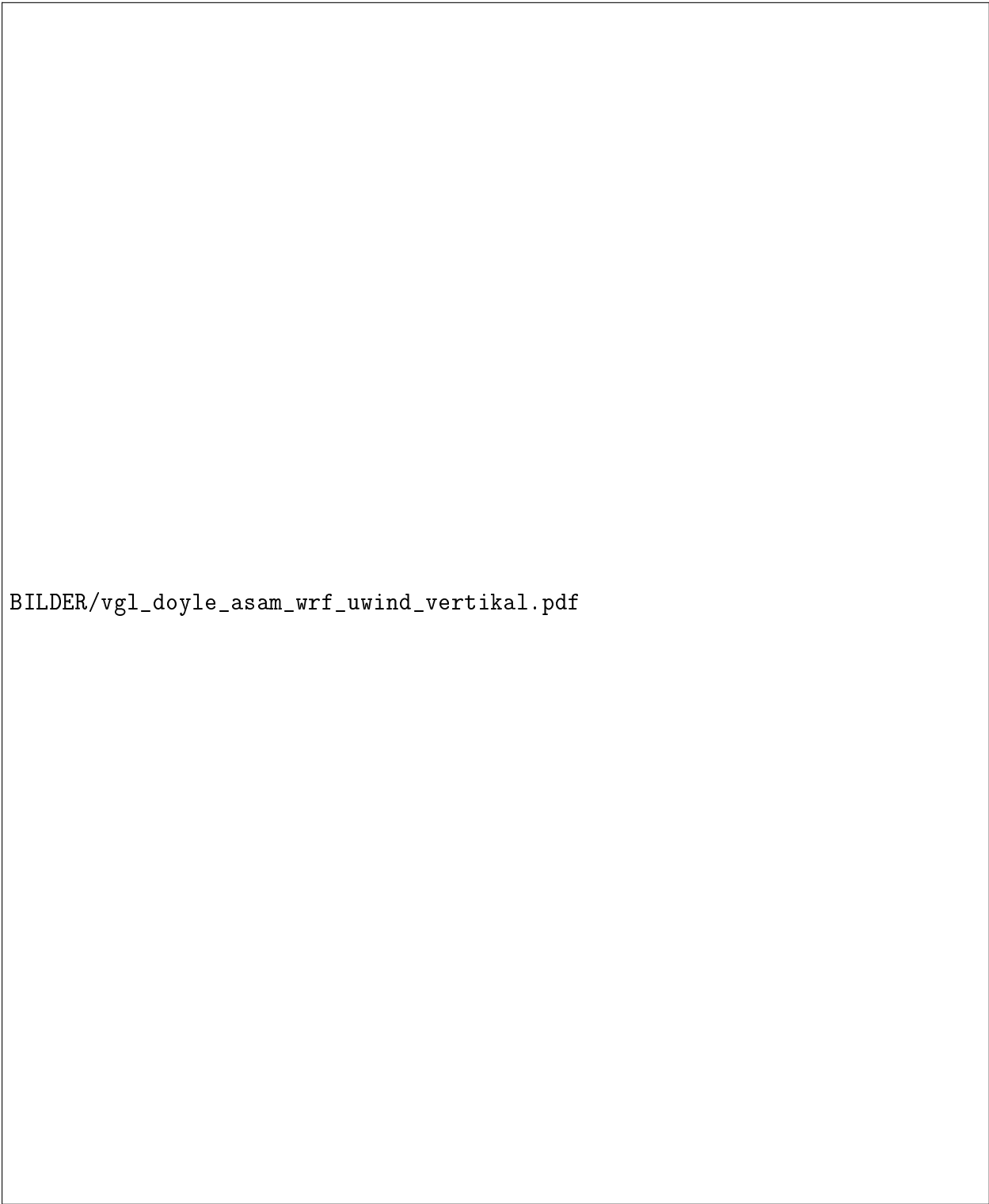
**Abb. 4.4:** Potentielle Temperatur  $\theta$  (K) simuliert mit COAMPS (Doyle und Durran 2002) nach 3 h (oben), mit ASAM nach 2 h (mitte) und WRF nach 3 h (unten). Als Bodenparametrisierung wurde für a), c) und e) *freeslip* und für b), d) und f) *noslip* Bedingungen zu Grunde gelegt, mit einer maximalen Rauigkeitslänge  $z_0 = 0.1$  m für *noslip*. Die Isentropen für die Rechnungen mit COAMPS liegen 4 K auseinander.



## Fallwind und Rotor

Die leeseitigen Windgeschwindigkeiten sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Die Darstellungen entsprechen den Rechnungen wie in Abb. 4.4, es ist jedoch ein kleinerer Ausschnitt von  $60 \times 2 \text{ km}^2$  gezeigt. Wie erwähnt, wird im *freeslip* Fall das Gebiet hoher Windgeschwindigkeit im Lee von allen Modellen reproduziert. Unterschiede ergeben sich jedoch in der horizontalen Erstreckung dieses Fallwindgebietes. So findet man bei COAMPS die größte Ausdehnung des Bereiches von Windgeschwindigkeiten mit mehr als  $56 \text{ ms}^{-1}$ . Grund dafür ist die Distanz der Welle zum Berg. Je weiter weg sie entsteht, umso höhere Windgeschwindigkeiten können sich aufgrund des ausgedehnteren Bereiches freien Strömens einstellen. So erklärt sich das geringere Maximum der Windgeschwindigkeit der beiden anderen Modelle gegenüber dem COAMPS mit dem bergnahem Entstehungsort der gefangenen Schwerewelle.

Auffälliger sind die Differenzen im *noslip* Fall. Bei zugeschalteter Reibung bilden sich Wirbel aus. Man erkennt diese an einer Windumkehr am Boden, d. h. man erhält eine der Hintergrundströmung entgegengerichtete, negative horizontale Windgeschwindigkeit. Diese Wirbel entstehen unterhalb der Wellenmaxima und werden durch Strömungsgeschwindigkeit, Reibung und die turbulente Längenskala massgeblich beeinflusst. Man erkennt bei allen Modellen eine annähernd ähnlich starke Intensität der Wirbel, welche die maximal negative Geschwindigkeit von  $u = -10 \text{ ms}^{-1}$  nicht überschreiten. Unterschiede zeigen sich auch in der Anzahl der Rotoren und deren Entstehungsort. Mit zwei Wirbeln fällt die Anzahl beim COAMPS am geringsten aus. Bei ASAM und WRF findet man jeweils mindestens vier Wirbel. Diese sind jedoch nicht regelmäßig verteilt. Während beim COAMPS die zwei Wirbel direkt unter den ersten zwei Wellenmaxima liegen, erkennt man turbulente Bereiche bei ASAM und WRF auch mit zunehmender Entfernung vom Berg. Trotz geringerer horizontaler Wellenlänge beim WRF mit  $\lambda = 7.5 \text{ km}$  im Vergleich zu ASAM mit  $\lambda = 8.5 \text{ km}$  und COAMPS mit  $\lambda = 9.3 \text{ km}$  weisen sowohl WRF als auch ASAM bei 38 km einen besonders starken Wirbel auf, dessen Windumkehr bei einer Höhe von 200 m relativ hoch stattfindet. Zudem ist das Wellenbild der Amplitude beider Modelle sehr viel asymmetrischer ausgeprägt als das vom COAMPS.



BILDER/vgl\_doyle\_asam\_wrf\_uwind\_vertikal.pdf

**Abb. 4.5:** Horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) simuliert mit COAMPS (Doyle und Durran 2002) nach 3 h (oben), mit ASAM nach 2 h (mitte) und mit WRF nach 3 h (unten). Als Bodenparametrisierung wurde für a), c) und e) *freeslip* und für b), d) und f) *noslip* Bedingungen zu Grunde gelegt, mit einer maximalen Rauigkeitslänge  $z_0 = 0.1$  m für *noslip*.

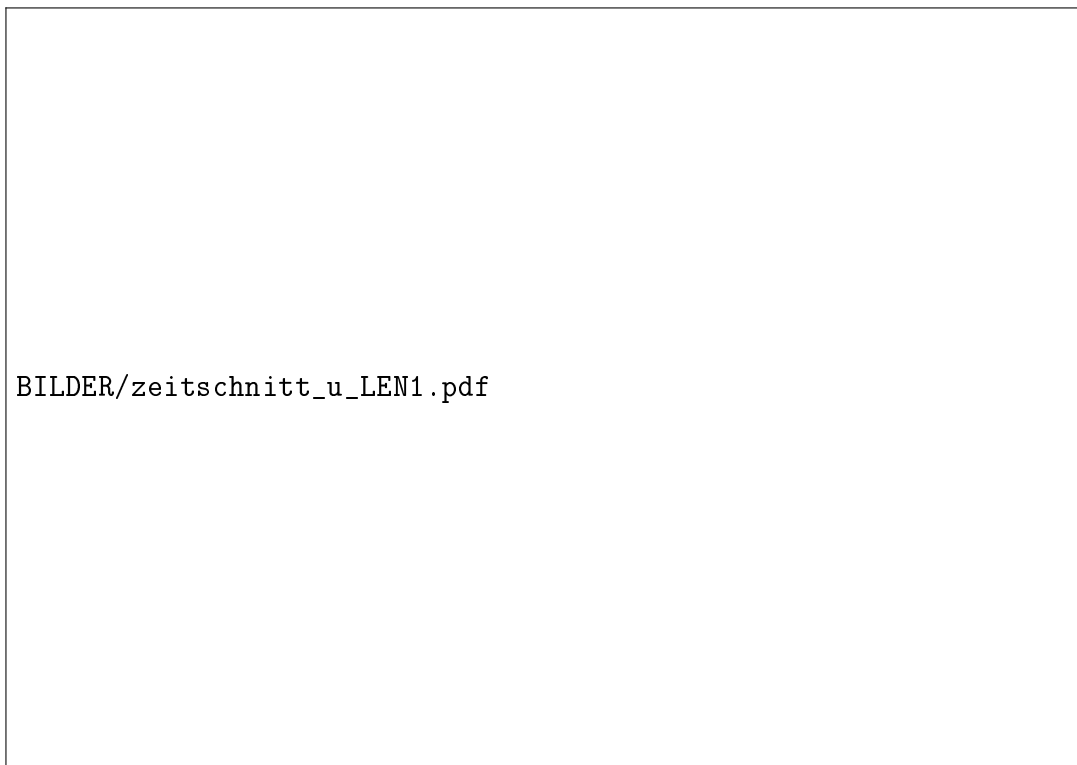
Als eine mögliche Erklärung der Modelldifferenzen im *noslip* Fall sollte man noch die Unterschiede in der Bodenparametrisierung erwähnen. Während im ASAM und COAMPS die Rauigkeit linear an deren Maximalwert angeglichen wird, liegt diese beim WRF schon ab der ersten Gitterzelle an. Testrechnungen mit dem ASAM zeigen den Einfluss einer solchen Darstellung der Rauigkeit auf die horizontale Windgeschwindigkeit. Bei Anliegen der Rauigkeit über das komplette Modellgebiet verstärkt sich der Gradient der horizontalen Windgeschwindigkeit im Lee des Gebirges. Der Bereich hoher Strömungsgeschwindigkeit liegt näher am Bergrücken an und die sich herausbildende Welle verschiebt sich geringfügig in Strömungsrichtung. Die Bodenparametrisierung könnte somit eine mögliche Ursache für die Modelldifferenzen im *noslip* Fall darstellen. Jedoch erklärt dies nicht, weshalb im *freeslip* Fall das WRF die Schwerewelle näher zum Berg und einen schwächeren Talwind produziert. Auch die großen Differenzen zum COAMPS lassen sich damit nicht erörtern.

Eine weitere mögliche Ursache für die Differenzen der Modelle, insbesondere hinsichtlich des Entstehungsortes der gefangenen Leewelle, kann das gewählte Dämpfungsverfahren an den Modellrändern sein. Im COAMPS werden an den seitlichen Rändern sowie am Modelloberrand Dämpfungsschemata verwendet, die sich die Ausstrahlungsbedingung zunutze machen (Orlanski 1976; Klemp und Durran 1983; Bougeault 1983). Im WRF wurden offene Randbedingungen in Strömungsrichtung und eine Rayleigh-Dämpfung am Modelloberrand verwendet (Skamarock u. a. 2005). Sensitivitätsstudien und vergleichende Modellrechnungen zum Einfluss der Randparametrisierung auf die Simulationsergebnisse wurden nicht durchgeführt. Es ist jedoch vorstellbar diesen Ansatz im Rahmen einer weiteren Arbeit ausführlich zu diskutieren.

Als eine Besonderheit, die nur im ASAM beobachtet wurde, ist noch die Verschiebung des Bereiches maximaler negativer Windgeschwindigkeit innerhalb des Rotors zu benennen. Anders als bei den anderen Modellen ist der Wirbel nicht zentriert unterhalb des Wellenmaximums. Das Rotormaximum verlagert sich in Strömungsrichtung und ist besonders gut an dem Wirbel bei 38 km zu erkennen. Auch bei anderen Simulationen mit dem Modell konnte dies festgestellt werden. Es lässt sich jedoch im Moment keine plausible Begründung dafür finden.

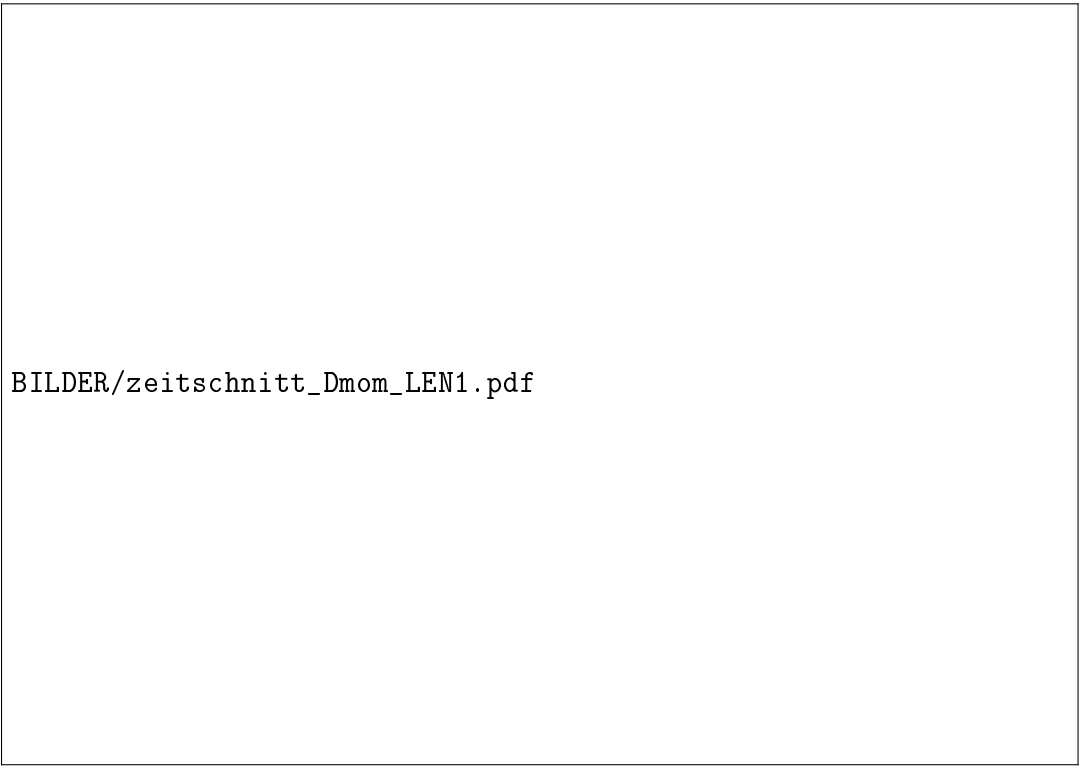
## Zeitreihe

In den Abbildungen 4.4 und 4.5 ist für die drei Modelle je der quasistationären Zustand dargestellt, der sich nach einer Simulationszeit von  $t = 2$  h bzw. 3 h einstellt. Bis dieser Zustand erreicht wird, muss sich das Modell einschwingen. Diese Phase des Einschwingens verdeutlichen Abbildung 4.6 und 4.7 anhand des Modells ASAM. Abbildung 4.6 zeigt den Windgeschwindigkeitsbetrag  $u$  über eine Integrationszeit von  $t = 3$  h im Intervall von 15 min. Innerhalb der ersten Stunde bildet sich eine gefangene Leewelle aus, die nah am Berg zwei starke Auslenkungen aufweist. Es zeigen sich sogar zwei Rotoren. Deutlich erkennbar ist die Verlagerung des Wirbelmaximums bei einer Zeit  $t = 75$  min. Mit voran schreitender Zeit nehmen diese Wirbel an Stärke ab. Die Wellenstruktur bildet sich nun auch in größerer Entfernung vom Berg aus.



**Abb. 4.6:** Entwicklung des Windgeschwindigkeitsbetrages  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) im Lee des Agnesi-Berges mit einer Längenskala  $\Lambda \approx 80$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf bis  $t = 180$  min im Abstand von 15 min.

Für den Talwind im Lee zeigt sich zu Beginn der Simulation eine Zunahme der Windgeschwindigkeit, die mit  $50 \text{ ms}^{-1}$  nach einer Stunde ihr Maximum erreicht. Danach nimmt die Windgeschwindigkeit wieder ab, was durch eine Verlagerung der Welle entgegen der Strömungsrichtung hin zum Berg bewirkt wird. Das Talwindgebiet wird in seiner Ausdehnung eingeschränkt, sodass sich die maximale Strömungsgeschwindigkeit verringert. Ab einer Simulationszeit von zwei Stunden kann man von Quasistationarität sprechen. Die gefangene Leewelle ist voll ausgebildet und sie verlagert sich nun nicht mehr, lediglich ein sich bei 40 km befindliches Maximum zum Zeitpunkt 120 min wandert weiter in Strömungsrichtung.



BILDER/zeitschnitt\_Dmom\_LEN1.pdf

**Abb. 4.7:** Entwicklung des Diffusionskoeffizienten für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) im Lee des Agnesi-Berges mit einer Längenskala  $\Lambda \approx 80 \text{ m}$ . Dargestellt ist der zeitliche Verlauf bis  $t = 180 \text{ min}$  im Abstand von 15 min.

In der zeitlichen Darstellung des Diffusionskoeffizienten erkennt man ebenso die Strukturen der gefangenen Schwerewelle. Nach  $t = 15 \text{ min}$  zeigt sich ab einer Entfernung von 30 km vom Berg die Reibungsschicht, die sich in Abb. 4.6 durch eine Abnahme der Windgeschwindigkeit zum Boden hin kenntlich macht. Weit aus ein-

drucksvoller ist der sogenannte *spill over*, eine Art Wellenbrechen, was 20 km hinter dem Berg erfolgt. Es bildet sich ein scharfer horizontaler Gradient des Diffusionskoeffizienten aus. Bei einer Höhe von 250 m zeigt sich eine Überwälzung dieses Gradienten. Zum Zeitpunkt  $t = 30$  min hat sich der Diffusionskoeffizient schon weit über diesen Ort hinaus ausgebreitet. Dabei wird die allein reibungsbedingte Diffusion immer schwächer und mit der Zeit durch die turbulente Diffusion dominiert. Auch im Diffusionskoeffizienten erkennt man nach 120 min einen quasistationären Zustand, eine zwischen Boden und der in 3 km Höhe befindlichen Diskontinuität gefangene Schwerewelle.

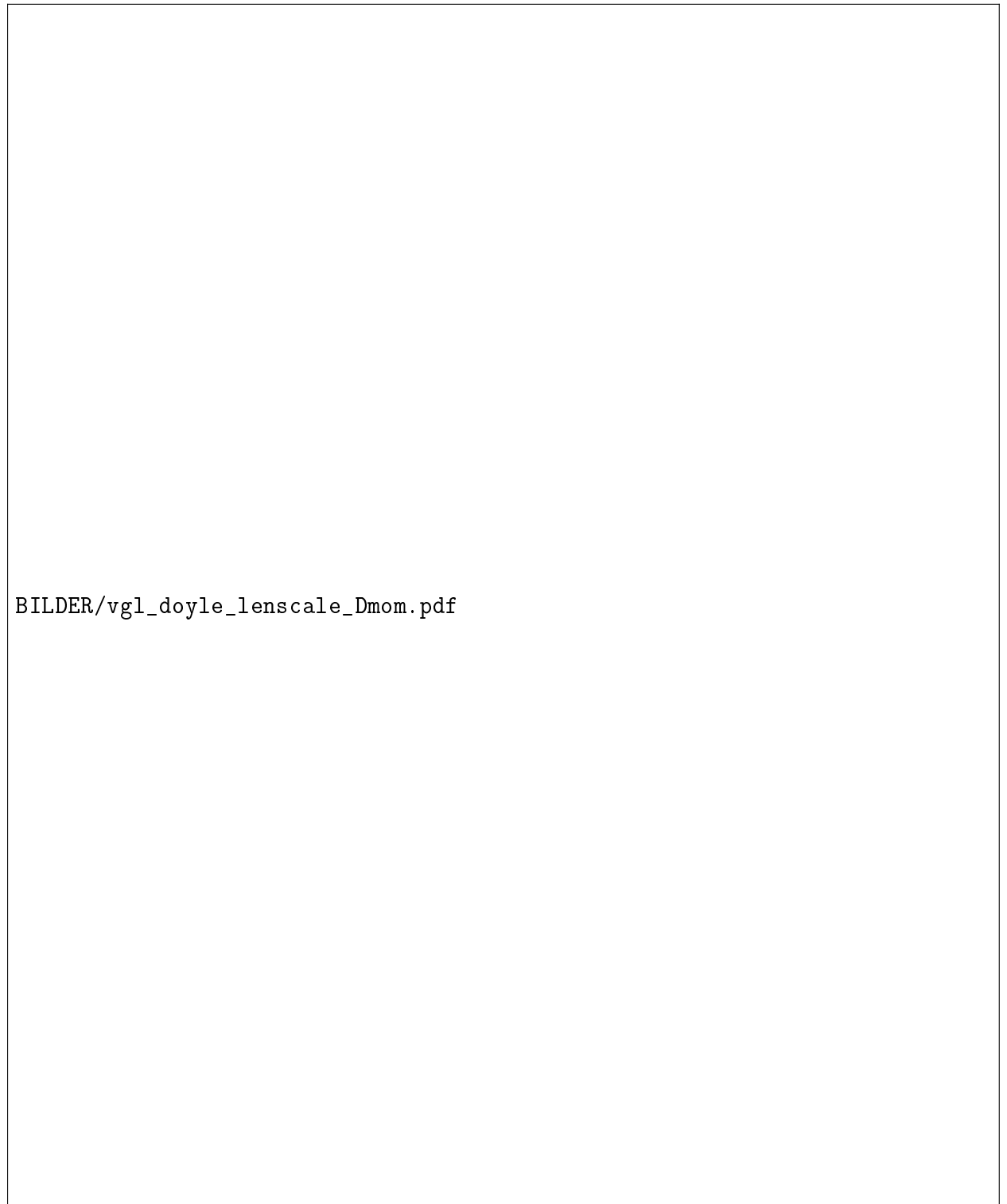
### 4.2.2. Turbulente Längenskala

In Abschnitt 4.1 wurde der Einfluss der turbulenten Längenskala auf den Diffusionskoeffizienten und damit verbunden die Turbulenz angesprochen. Auf Basis der in 4.2.1 gesetzten Modellkonfiguration und der dort verwendeten Initialisierung wurden weitere Rechnungen mit ASAM durchgeführt, die eben diesen Einfluss der turbulenten Längenskala näher beleuchten sollen. Als Vorfaktor der Längenskala wurden 0.25, 1.0 und 1.25 ausgewählt. Die Ergebnisse für Diffusionskoeffizient, TKE, Windgeschwindigkeit und potentielle Temperatur sind in den Abbildungen 4.8 und 4.9 dargestellt. Prinzipiell beobachtet man den gleichen Sachverhalt wie in Abschnitt 4.1. Eine betragsmäßig große turbulente Längenskala impliziert einen betragsmäßig größeren Diffusionskoeffizienten und damit verbunden größere Werte für die TKE. Des Weiteren erwartet man für die horizontale Windgeschwindigkeit bei kleiner Längenskala eine stärkere Abnahme des Windes am Boden. Der Impulseintrag aus der Grundströmung ist aufgrund des kleineren Diffusionskoeffizienten geringer. Eine Intensivierung der Rotorstärke ist die Folge. Im Geschwindigkeitsprofil der Abbildung 4.9 erkennt man eben diese Zunahme der Rotoren an höheren Werten negativer Windgeschwindigkeiten. Die Rotoren bei einer Längenskala  $\lambda \approx 20$  m sind zahlenmäßig, wie auch kräftemäßig denen bei  $\lambda \approx 80$  m und 100 m überlegen. Deren rückläufige Komponente erstreckt sich im Mittel bis zu 300 m hoch. Ein einzelner Rotor unter dem ersten Wellenmaximum erreicht mit der Richtungsumkehr des Windes sogar eine Höhe von 400 m-450 m. Für größere Längenskalen findet man eine maximale Höhe der Windumkehr von 200 m. Bei der vorliegenden Modellkonfiguration reicht ein Viertel der turbulenten Längenskala aus, um Wirbel zu produzieren, die

sich um das 1.5-fache vertikal höher erstrecken. In Folge dessen bildet sich auch ein großer Vertikalgradient der Horizontalgeschwindigkeit heraus. Besonders im oberen Übergangsbereich der Windumkehr des Wirbels zur Grundströmung ist dieser sehr viel stärker ausgeprägt als das bei den Ergebnissen größerer Längenskalen der Fall ist.

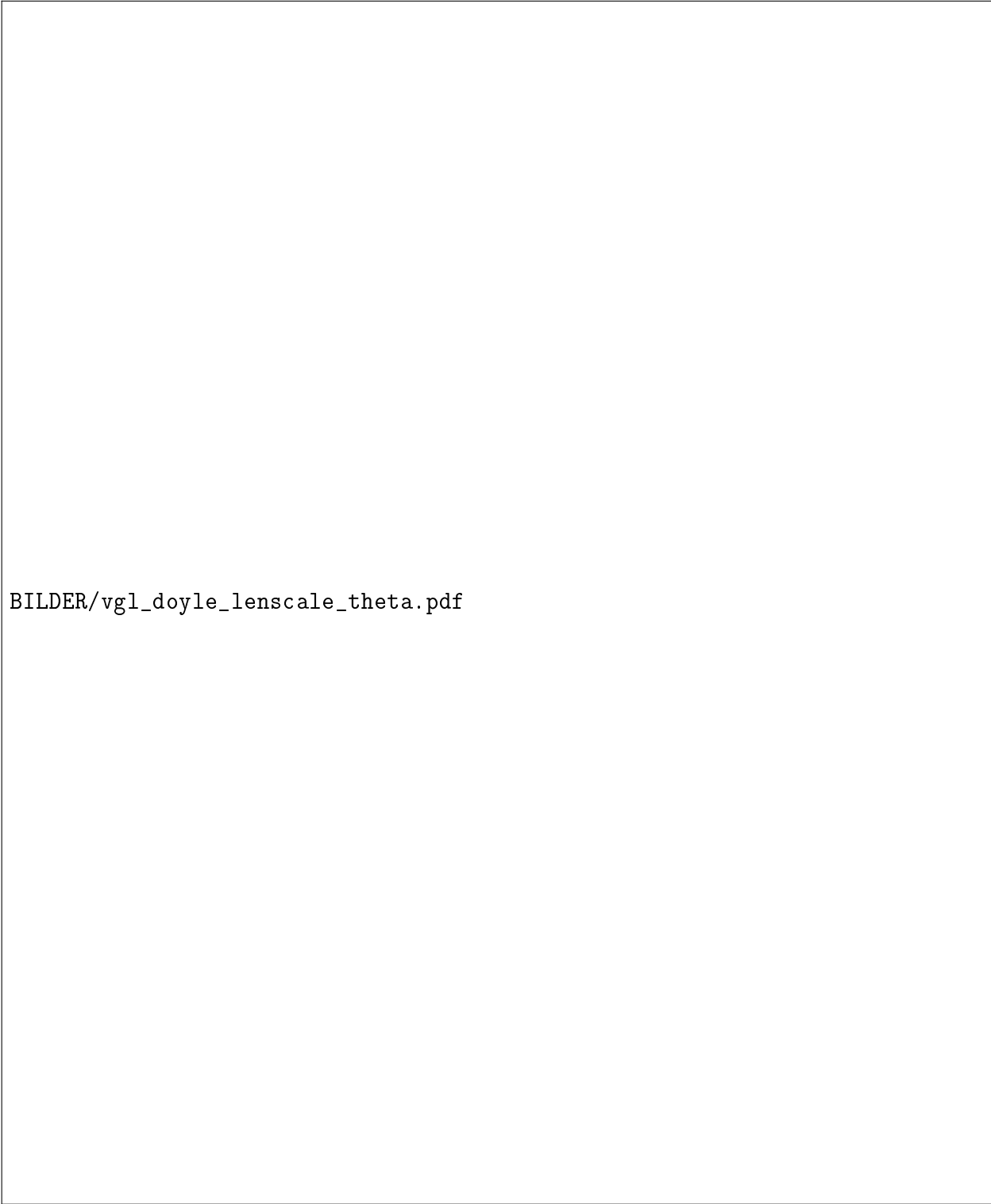
### **Kleinskalige Wirbelstrukturen**

Bei Modifizierung der turbulenten Längenskala zeigen sich starke Abweichungen in der Art der Rotoren. Die Verlagerung des Rotormaximums innerhalb des Wirbels wurde schon angesprochen. Hier jedoch zeigt sich eine Aufspaltung der Rotoren. Es bilden sich innerhalb eines Wellenmaximum bis zu drei eigenständige Rotoren aus. Bei geringerer horizontaler Auflösung und ebenso einem Viertel der turbulenten Längenskala konnte widererwarten keine horizontale Aufspaltung der Rotoren festgestellt werden. Offensichtlich tritt diese Aufspaltung erst bei einem bestimmten Verhältnis zwischen turbulenter Längenskala und horizontaler Auflösung auf. Im Fall der mit dem Faktor 0.25 skalierten Längenskala ist das Verhältnis gleich 0.2. Weiterführende Tests zur genaueren Bestimmung eines Zusammenhanges zwischen turbulenter Längenskala und Modellauflösung müssen jedoch noch durchgeführt werden. Es kann im Rahmen dieser Arbeit lediglich festgestellt werden, dass unter diesen bestimmten Simulationsbedingungen ein solcher Effekt auftritt. Ob dieser Effekt nun numerisch bedingt oder physikalischer Natur ist lässt sich hier nicht sagen.



**Abb. 4.8:** Diffusionskoeffizient für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) und TKE  $k$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ) für die Überströmung des Agnesi-Berges unter *noslip* Bedingungen und mit unterschiedlicher Skalierung der Längenskala  $\Lambda$  mit 0.25, 1.00 und 1.25. Folgende turbulente Längenskala ergibt sich für a), b)  $\lambda \approx 20$  m; für c), d)  $\lambda \approx 80$  m und für e), f)  $\lambda \approx 100$  m.



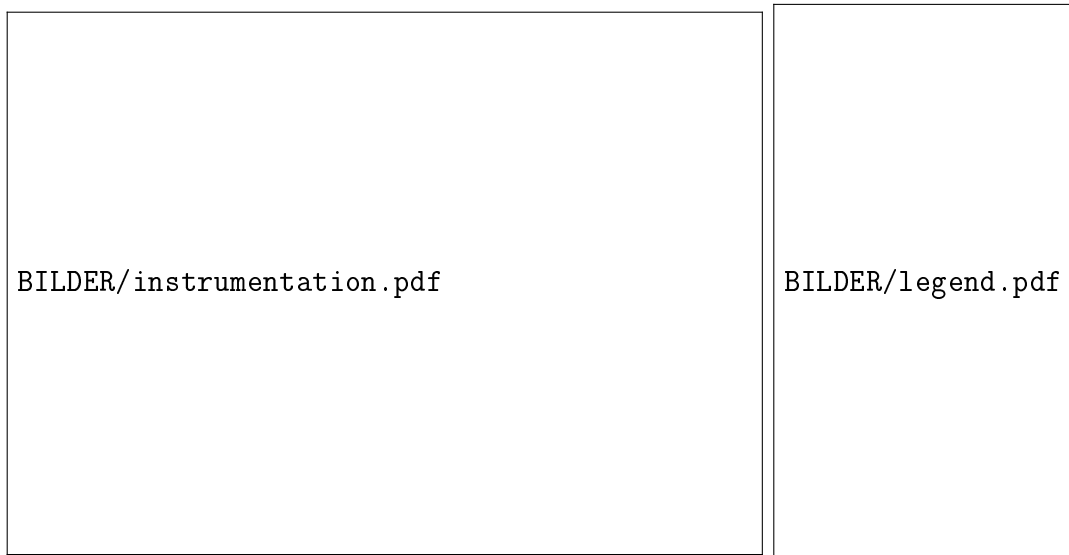


BILDER/vgl\_doyle\_lenscale\_theta.pdf

**Abb. 4.9:** Potentielle Temperatur  $\Theta$  (K) und die horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) für die Überströmung des Agnesi-Berges unter *noslip* Bedingungen und mit unterschiedlicher Skalierung der Längenskala  $\Lambda$  mit 0.25, 1.00 und 1.25. Folgende turbulente Längenskala ergibt sich für a), b)  $\lambda \approx 20$  m; für c), d)  $\lambda \approx 80$  m und für e), f)  $\lambda \approx 100$  m.

### 4.3. T-REX Kampagne

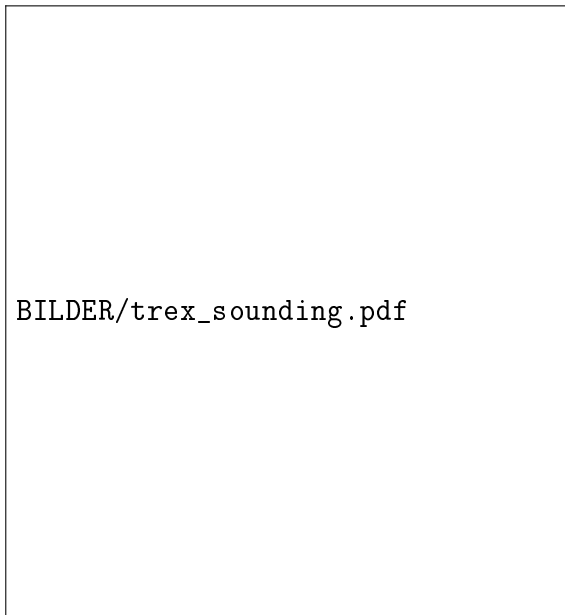
Das *Terrain-induced Rotor EXperiment* (T-REX) steht für eine internationale Initiative zur Erforschung des gekoppelten Systems zwischen gebirgsinduzierten Schwellen und Rotoren und der atmosphärischen Grenzschicht. Ebenso Bestandteil der Untersuchungen ist der Austausch zwischen Stratosphäre und Troposphäre, sowie die Entwicklung komplexer Strukturen der PBL in Abwesenheit von Rotoren (Grubisic u. a. 2004). Ausgehend vom *Sierra Rotors Project* im Frühjahr 2004 (Cohn u. a. 2004), konnten erste Daten und Erfahrungen gesammelt werden. Diese Messperiode fand im Owens Valley, Kalifornien (USA) statt, ein Tal im Osten der südlichen Sierra Nevada. Im Westen begrenzt durch ein hohes, steil abfallendes und annähernd quasi-zweidimensionales Gebirge, bietet dieses Tal ideale Bedingungen zur Entwicklung von Rotoren. Es wurden zum Teil auffallend starke Rotoren beobachtet.



**Abb. 4.10:** Schematische Darstellung der bodengestützten Messverfahren der T-REX Kampagne März/April 2006 im Owens Valley, Kalifornien; Quelle: [http://www.met.utah.edu/whiteman/T\\_REX/p6.html](http://www.met.utah.edu/whiteman/T_REX/p6.html) - Zugriffsdatum 29. November 2007

Mit der ersten Phase 2004 wurden grundlegende wissenschaftliche Fragestellungen und der experimentelle Aufbau für T-REX begründet. Diese Ziele vor Augen, wurde 2006 mit T-REX die zweite Phase gestartet. Von Februar bis April des Jahres fanden Messungen mithilfe einer Vielzahl bodengestützter Messverfahren wie automatische

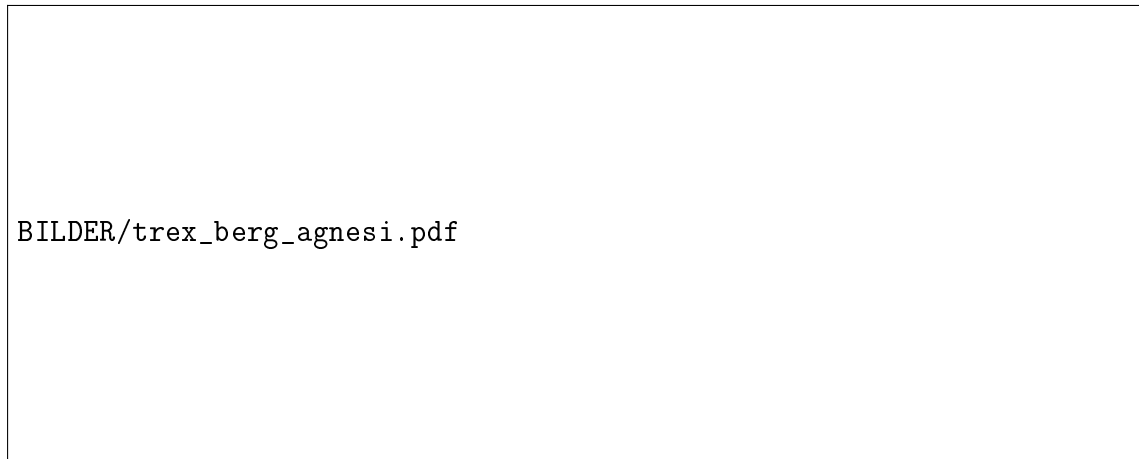
Messstationen, Messtürme, Radar, Doppler-Lidar, Aerosol-Lidar, Radiosonden etc. (siehe Abb. 4.10) und Flugzeugmessverfahren (in-situ, Lidar, Dropsonden) in und um Owens Valley statt (Grubisic u. a. 2004). Die dabei gewonnenen Daten stellen eine einzigartige Grundlage zur Validierung numerischer Modellergebnisse dar. Leider ist es nicht möglich gewesen Reanalysedaten im Rahmen dieser Arbeit den Modellergebnissen gegenüber zu stellen, da mir diese nicht zur Verfügung standen.



**Abb. 4.11:** Gemitteltes Vertikalprofil für horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  und potentielle Temperatur  $\theta$  basierend auf dem Radiosondenaufstieg vom 25. März 2006, 2100 UTC MGAUS und denen von Oakland vom 25. März 2006, 1200 UTC, sowie 26. März 2006, 0000 UTC.

Die folgenden Modellläufe basieren auf einem T-REX Datensatz vom 25. März 2006 (21UTC), welcher von Andreas Dörnbrack (DLR, Oberpfaffenhofen) zur Verfügung gestellt wurde. Er beinhaltet einen bearbeiteten Radiosondenaufstieg mit Angaben über Höhe, potentielle Temperatur und den mittleren Windgeschwindigkeitsbetrag in Strömungsrichtung (Abb. 4.11). Die Windrichtung wurde senkrecht zur Hauptausrichtung des Gebirges gedreht. Die Windgeschwindigkeit nimmt mit einem mittleren vertikalen Gradienten von  $\approx 5 \text{ ms}^{-1}$  pro km bis zu einer Höhe von 10 km zu. Dort befindet sich das Maximum des *Jetstreams* mit einer horizontalen Geschwindigkeit  $u = 50 \text{ ms}^{-1}$ . Mit einem etwas schwächeren Gradienten nimmt die Windgeschwindigkeit bis zu einer Höhe von 25 km auf Null ab. Ab dieser Höhe ist der Betrag der Geschwindigkeit gleich Null gesetzt, damit die Reflexion von Schwerkwellen am oberen Rand des Modellgebietes unterbunden wird. Zum Boden hin wurde ein Minimum von  $u = 5 \text{ ms}^{-1}$  angenommen. Des Weiteren wurden scharfe Gradienten in niedrigen Höhen und in der Stratosphäre herausgemittelt. Das Ver-

tikalprofil der potentiellen Temperatur zeigt zudem noch eine Inversion bei 11 km Höhe. Mit dieser atmosphärischen Schichtung hat man ideale Voraussetzungen zur Herausbildung von Schwerewellen.



**Abb. 4.12:** Ausschnitt des W-O-Gebirgsprofils der Sierra Nevada und asymmetrischer Agnesi Berg (rot) mit einer Halbwertsbreite im Luv  $b = 40$  km und im Lee  $b = 5$  km.

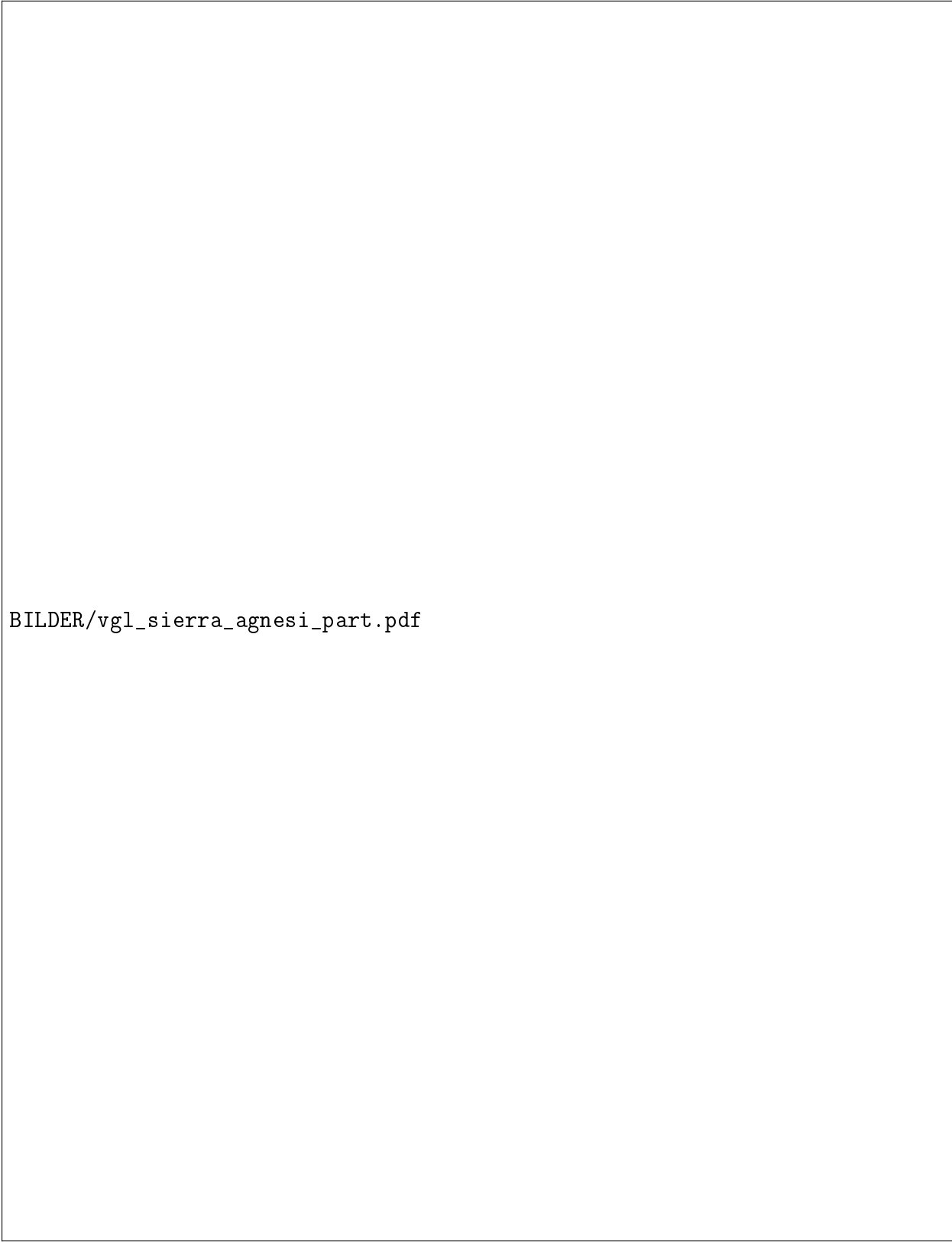
Ein Gebirgsprofil der in Flugrichtung West nach Ost überströmten Sierra Nevada wurde mittels der *Cut-Cell* Methode (vgl. Abschnitt 3.2.1) in das Modell eingelesen. Das Modellgebiet umfasst in Strömungsrichtung 430 km und ist horizontal in eine Gitterweite  $dx = 1000$  m unterteilt. Vertikal wird mit einer Auflösung  $dz = 50$  m eine Modellhöhe von 32 km erfasst. Sowohl am Einströmrand, als auch an der Modellobergrenze befinden sich Dämpfungsschichten, die sich nur in ihrer Mächtigkeit unterscheiden. Am westlichen Einströmrand beträgt diese 30 km und an der Obergrenze 6 km. Anders als in den reibungsbehafteten Strömungssimulationen des Abschnittes 4.2 liegt für diese Rechnung ein beobachtetes, gemitteltes Vertikalprofil zur Initialisierung vor und die Bodenrauigkeit, mit  $z_0 = 0.1$  m, liegt ab der ersten Gitterzelle an. Aufgrund der geringen Auflösung wurde die turbulente Längenskala mit einem Faktor gleich 0.25 skaliert, sodass sich eine effektive Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m ergibt. Mit der reduzierten Längenskala verhindert man eine übermäßig starke Diffusion.

Als Vergleichsobjekt wurde eine Überströmung eines asymmetrischen Agnesi-Berges verwendet, dessen Halbwertsbreite in Strömungsrichtung liegend bergauf  $b = 40\text{ km}$  und bergab  $b = 5\text{ km}$  beträgt. Dieser ideale Berg ähnelt im Wesentlichen dem mittleren Abschnitt des Gebirgsschnittes der Sierra Nevada (vgl. Abb. 4.12).

### Gebirgsschnitt versus Agnesi

Ergebnisse vom ASAM zum Zeitpunkt der Quasistationarität  $t = 240\text{ min}$  für die horizontale und vertikale Windgeschwindigkeit, sowie die des Diffusionskoeffizienten finden sich in Abbildung 4.13. Für den Gebirgsschnitt zeigt sich in der horizontalen Windgeschwindigkeit eine Unterbrechung des *Jetstreams* in Höhe des tiefen Taleinschnittes. Man erkennt einen starken Fallwind mit vertikalen Windgeschwindigkeiten mit bis zu  $-8\text{ ms}^{-1}$ . An der steil abfallenden Orographie wird Impuls nur innerhalb nah angrenzender Zellen ausgetauscht. Der Talwind wird kaum durch Reibung abgebremst. Erst der reibungsbehaftete Impulsaustausch an dem sich anschließenden Hindernis in Form einer scharfen Gebirgsspitze bei  $120\text{ km}$  bremst die horizontale Windgeschwindigkeit auf Null ab. Gekennzeichnet durch eine hohe Vertikalgeschwindigkeit  $w = 6\text{ ms}^{-1}$  findet die Überströmung der Gebirgsspitze statt. Im Tal hat man aufgrund dieser starken Richtungsänderung auch die höchsten Werte für den Diffusionskoeffizienten. Im Lee der Gebirgsspitze entwickelt sich dann die Schwerewelle fort und bildet einen Rotor direkt hinter dem Berg.

Die Schwerewelle breitet sich auch in der Höhe aus und erreicht ihre größten Amplituden entlang der Inversion in  $10\text{ km}$  Höhe. Direkt über der Gebirgsspitze bildet sich ein horizontal scharf abgegrenzter Bereich hoher Auf- und Abwinde von  $\pm 12\text{ ms}^{-1}$  aus. Man erhält eine gefangene Schwerewelle. In Bereich der starken Vertikalwinde weist der *Jetstream* ein sekundäres Maximum mit über  $60\text{ ms}^{-1}$  auf. Für die Luftfahrt kann solch eine Situation starker Gradienten der Windgeschwindigkeit im Zusammenspiel mit räumlich engbegrenzter Winddrehungen ein enormes Potential an Gefahren in sich bergen. Ein Großteil der stark frequentierten Luftkorridore befindet sich in eben dieser Höhe. Die Erforschung solcher Systeme atmosphärischer Wellen liegt folglich im Sinne der Luftsicherheit.



BILDER/vgl\_sierra\_agnesi\_part.pdf

**Abb. 4.13:** W-O-Schnitt der Sierra Nevada, sowie eines 2500 m hohen asymmetrischen Agnesi-Berges mit einer Höhe  $H = 2500$  m und einer Halbwertsbreite im Luv  $b_{\text{Luv}} = 40$  km und im Lee  $b_{\text{Lee}} = 5$  km. Dargestellt sind die horizontale Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ), der Diffusionskoeffizient für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) und die Vertikalgeschwindigkeit  $w$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ) zur Zeit  $t = 240$  min für eine turbulente Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m.

Weiterhin fällt einem bei der Betrachtung des Diffusionskoeffizienten ein sich im Anströmbereich des Berges befindliches Gebiet auf, welches durch eine wellenförmige Struktur des Diffusionskoeffizienten gekennzeichnet ist. Diese Struktur markiert einen Bereich, dessen Horizontalgeschwindigkeit entgegen der Strömungsrichtung gerichtet ist. Der Austausch von Impuls findet ähnlich wie bei der Reibung am Boden direkt entlang der Grenzschicht zwischen den zwei gegenströmenden Luftmassen statt. Grund für die Wellenstruktur vor dem Berg ist offensichtlich der steile Anstieg des Gebirges, was zu einem *spill over* führt.

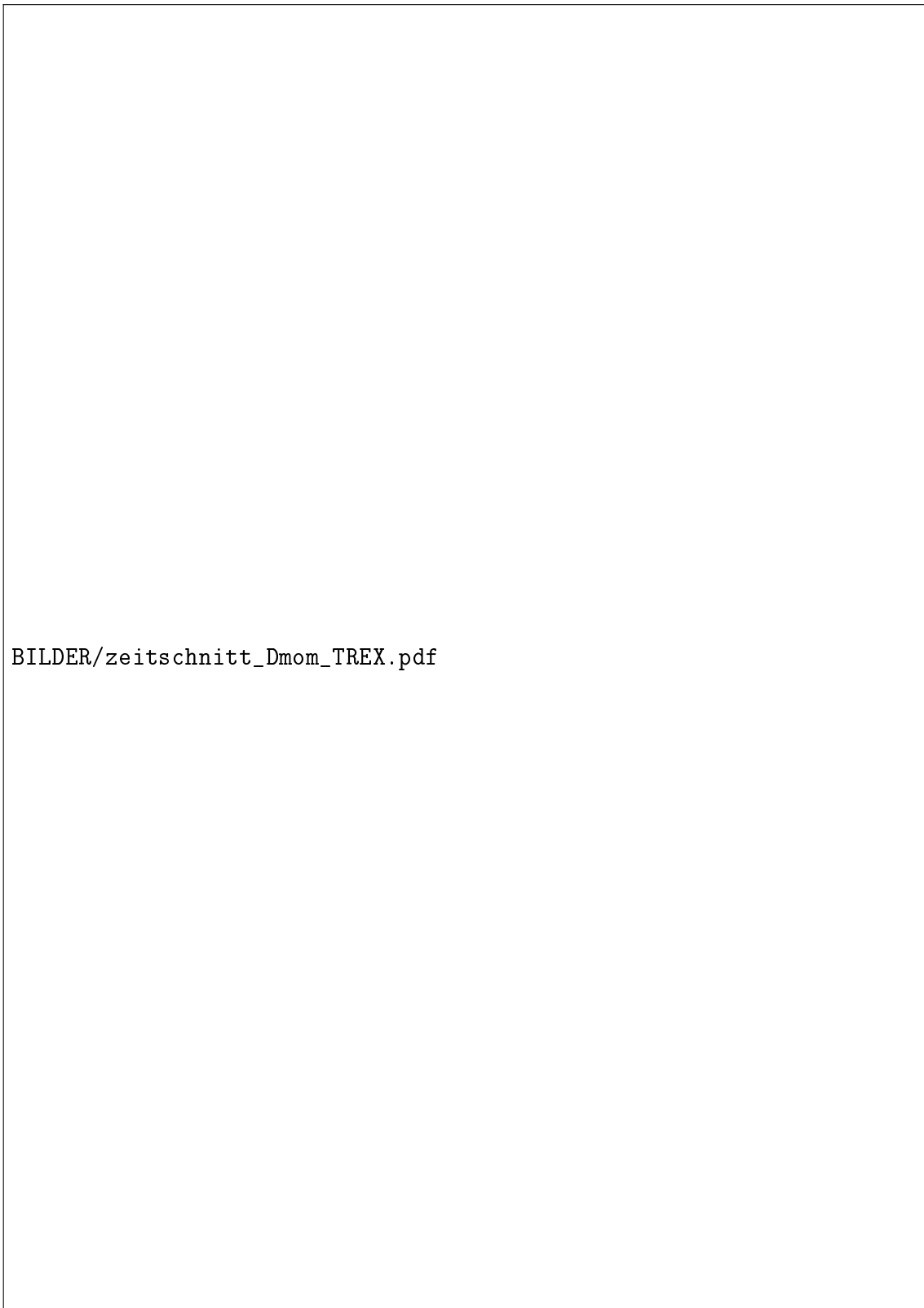
Beim Agnesi-Berg findet man im Wesentlichen ein ähnliches quasistationäres Bild. Der *Jetstream*, mit einer maximalen horizontalen Windgeschwindigkeit  $u \approx 56 \text{ ms}^{-1}$ , ist etwas schwächer ausgeprägt als bei der Überströmung des Gebirgsschnittes. Es findet sich jedoch auch hier ein starkes Abwindgebiet im Lee. Dieses ist jedoch horizontal enger begrenzt und somit ist der horizontale Gradient der Vertikalgeschwindigkeit größer. Im Fall des realen Gebirgsschnittes drängt die Talform der Strömung ihre Struktur auf. Im Lee des Agnesi-Berges hingegen kann sich die Welle frei entfalten. Die Wellenmaxima der Schwerewelle entlang der Inversion befinden sich jetzt auch direkt über denen bei 3 km Höhe. Es ergibt sich eine horizontale Wellenlänge von  $\approx 10 \text{ km}$ . Einen besonders auffälligen Unterschied erkennt man in dem sekundären Maximum des Horizontalwindes bei 10 km Höhe. Bei der Überströmung des realen Gebirgsschnittes bildet sich ein stärkeres Maximum der Strömungsgeschwindigkeit aus. Grund dafür ist offensichtlich die darunter gelegene kleine Bergspitze, welche die Ausbildung der Schwerewelle verstärkt. Beim Agnesi-Berg fehlt dieses zusätzliche Hindernis und die Grundströmung ist geringer, sodass sich das sekundäre Maximum von  $u$  weniger stark ausprägt.

### Zeitreihe

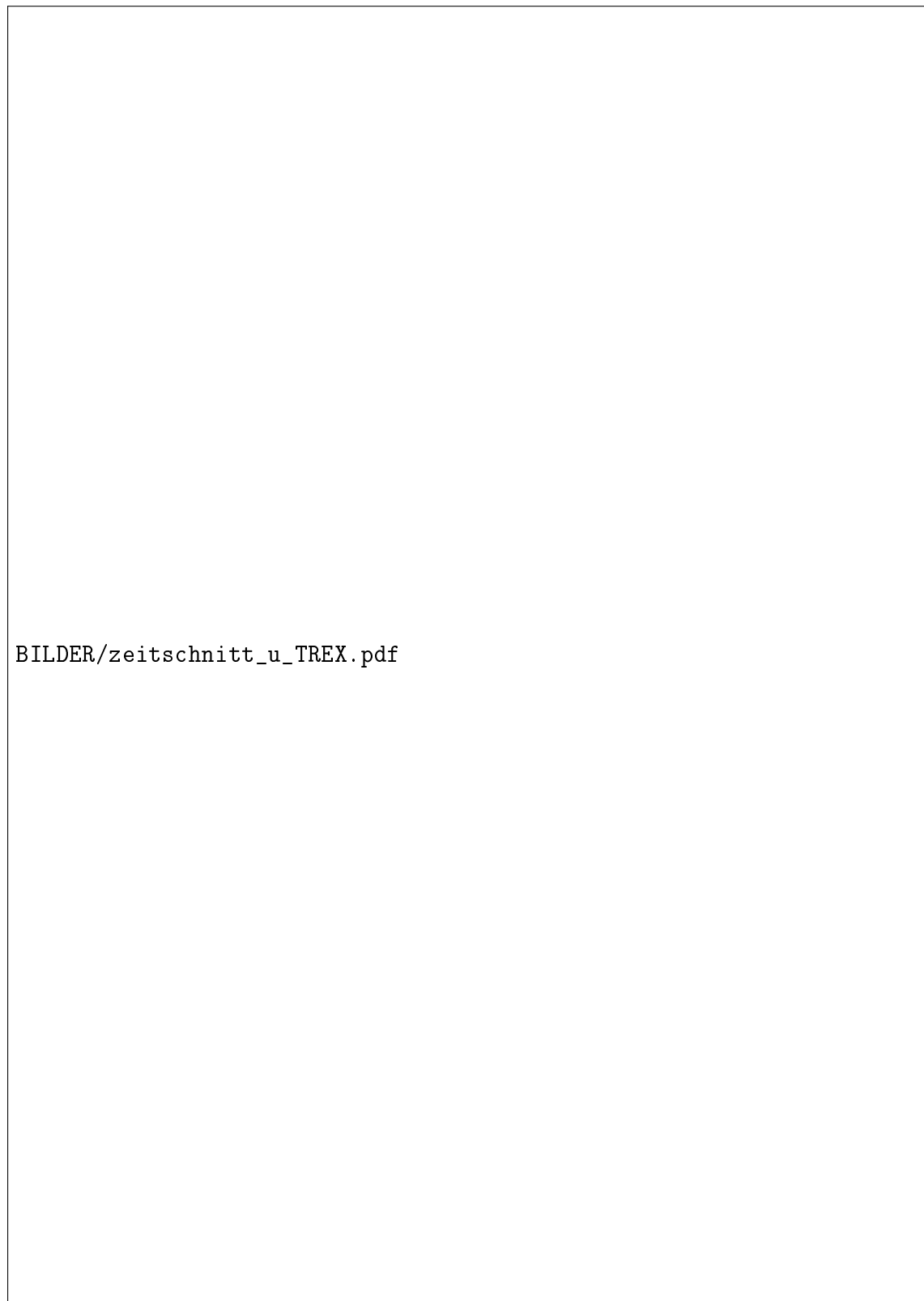
Die zeitliche Entwicklung der Überströmung des Gebirgsschnittes der Sierra Nevada, modelliert mit ASAM, ist in den Abbildung 4.14 (Diffusionskoeffizient) und 4.15 (Windgeschwindigkeit) dargestellt. Es wurde sich dabei auf einen kleineren Ausschnitt von nur 4500 m Höhe beschränkt, da hier im Wesentlichen die bodennahe Grenzschicht von Interesse ist. Im Abstand von 15 min wurden Zustandsaufnahmen gemacht, die über eine Simulationszeit von 240 min abgebildet sind. Im zeitlichen Verlauf erkennt man gut die Entwicklung hin zum quasistationären Zustand bei

$t = 240$  min. Der Diffusionskoeffizient (vgl. Abb. 4.14) erreicht seinen Maximalwert  $\nu \approx 55 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  während der ersten halben Stunde in der zerklüfteten Bergspitze des Gebirges. Danach verliert dieser zunehmend an Größe.





**Abb. 4.14:** Entwicklung des Diffusionskoeffizienten für Impuls  $\nu_m$  ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ) bei der Überströmung eines Gebirgsschnittes der Sierra Nevada mit einer turbulenten Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf im Abstand von 15 min bis zu einer Simulationszeit  $t = 240$  min.

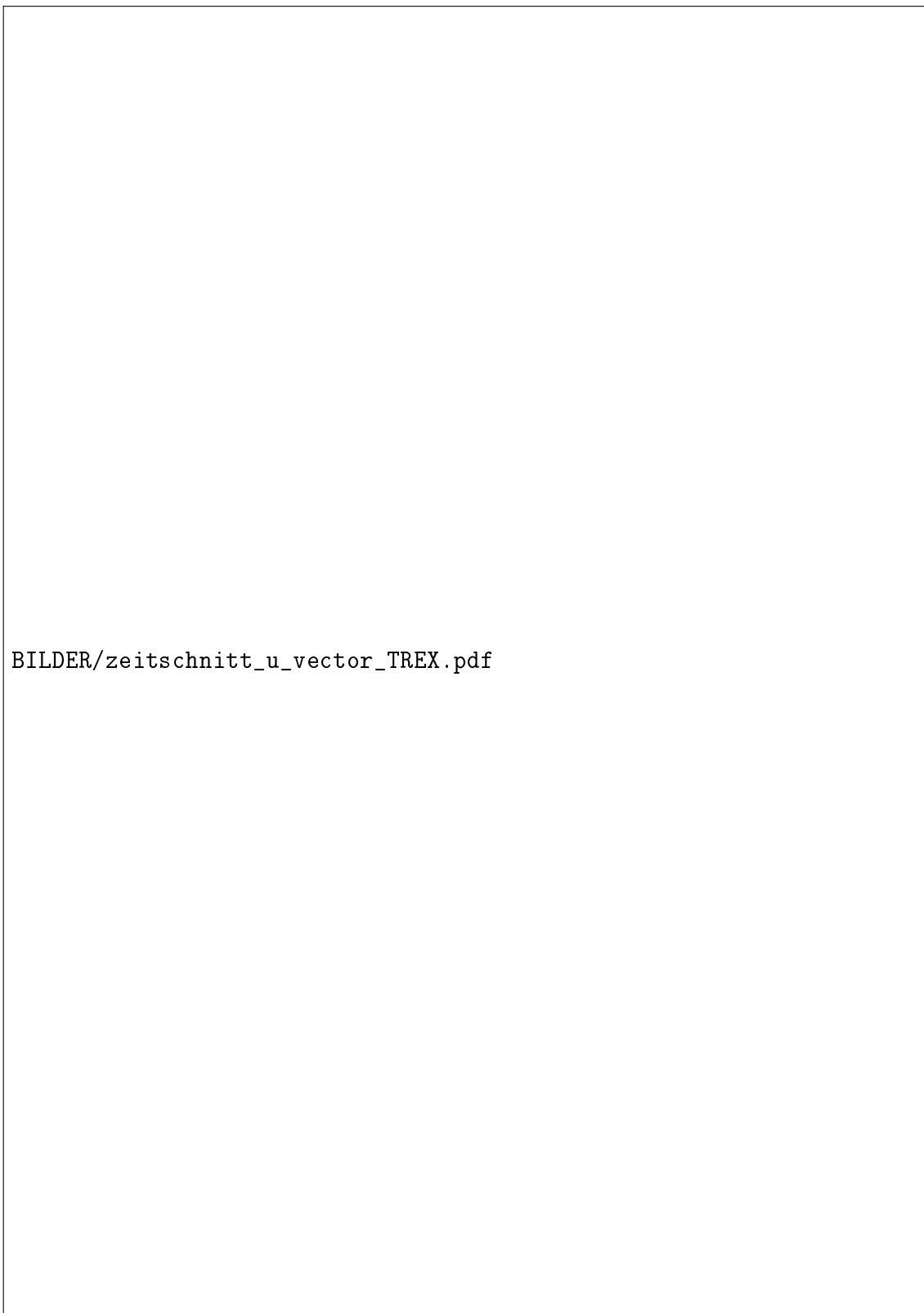


**Abb. 4.15:** Entwicklung der horizontalen Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) bei der Überströmung eines Gebirgsschnittes der Sierra Nevada mit einer turbulenten Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf im Abstand von 15 min bis zu einer Simulationszeit  $t = 240$  min.

Im Luv des Gebirges deutlich sichtbar, entwickelt sich das schon angesprochene Gebiet rückläufiger Strömung (vgl. Abb. 4.15). An dessen Oberseite bildet sich der Diffusionskoeffizient wellenförmig aus. Gleich nach Beginn der Simulation erkennt man im Bereich von 2000 m Höhe, direkt an der Vorderseite des Gebirges, erste entgegen dem Strom gerichtete Bewegungen. Innerhalb der ersten 30 min entwickelt sich eine sich die Bergsteigung hinab bewegende Strömung. Diese trifft bei 25 km auf eine kleine Bergspitze. Mit Überströmung der Bergspitze löst sich der Rückstrom nach einer Stunde langsam vom Boden ab. Seine vertikale Struktur ähnelt nun der einer Rauchfahne, die sich gefangen zwischen einer labilen Atmosphärenschicht am Boden und einer darüberliegenden Höheninversion ausbreitet. Mit voranschreitender Zeit wird diese Fahne in ihrer vertikalen Ausdehnung immer schmaller. An ihrer Oberkante bildet sich dann die wellenartige Struktur heraus, die sich besonders gut im Diffusionskoeffizienten widerspiegelt (Abb. 4.14). Nach  $t = 240$  min hat man letztlich den Zustand erreicht, der in der Abbildung 4.13 dargestellt ist.

Richtet man nun sein Augenmerk auf das Tal hinter dem Bergmaximum, so zeigen sich turbulente Strukturen während der Ausbildung des Talwindes. In Abbildung 4.16 sind der horizontale Geschwindigkeitsbetrag  $u$  und der Vektor der Geschwindigkeit dargestellt. Schon 15 min nach Simulationsbeginn hat sich im Tal ein mit  $u = -15 \text{ ms}^{-1}$  starker Gegenstrom gebildet. Dieser erstreckt sich über die gesamte horizontale Länge des Tales. Die Windumkehr befindet sich auf halber Höhe der das Tal im Osten begrenzenden kleinen Bergspitze. Durch den sich bildenden Talwind im Lee des Bergmassivs wird dieser Gegenstrom zunehmend in Richtung der Grundströmung gestaucht. Es bildet sich zwischen den Bergspitzen eine Wellenstruktur aus, die in horizontaler Richtung mit dem anderthalb- bis zweifachen ihrer Wellenlänge in das Tal hinein passt. Unter deren Maximum können sich kleinskalige Rotoren ausbilden. Nach 75 min erkennt man zwei eigenständige Wirbel, die jedoch innerhalb einer halben Stunde sich zu einem vereinen. Bei  $t = 135$  min hat sich dann der Talwind bis in die Senke des Tales hinab ausgedehnt. Der Gegenstrom sowie die Wirbel wurden dadurch gänzlich an die Luvseite der östlichen Bergspitze gedrängt. Die Leewelle hat sich mit ihrem ersten Maximum über die Bergspitze des kleinen östlichen Berges verschoben. Unter diesem Wellenmaximum bildet sich nun im Lee der kleinen Bergspitze wiederum ein starker Rotor aus (vgl. Abb. 4.9). Man kann dessen Entwicklung ab einer Zeit  $t = 165$  min verfolgen. Im Tal dominiert nun der

starke Fallwind und man findet nur noch reibungsbedingte kleinere Turbulenzen wandnah im Luv des östlichen Berges.



**Abb. 4.16:** Entwicklung der horizontalen Windgeschwindigkeit  $u$  ( $\text{ms}^{-1}$ ) bei der Überströmung eines Gebirgsschnittes der Sierra Nevada mit einer turbulenten Längenskala  $\Lambda \approx 160$  m. Dargestellt ist der zeitliche Verlauf im Abstand von 15 min bis zu einer Simulationszeit  $t = 240$  min.



## 5. Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieser Diplomarbeit war die Implementierung verschiedener Ansätze zur Turbulenz- und Bodenparametrisierung in das Strömungsmodell ASAM und deren Verwendung unter dem Gesichtspunkt reibungs-induzierter Überströmung von quasizweidimensionalen Hindernissen.

Die Bodenparametrisierung, d.h. der Austausch von Impuls und Wärme zwischen Boden und erster Gitterzelle, wurde mittels der Formulierung des Austausches der turbulenten Flüsse nach Uno u. a. (1995) realisiert. Auf Grundlage der vorherrschenden Stabilität werden die Transfer-Koeffizienten für Impuls  $C_D$  und Wärme  $C_H$  bestimmt. Unter Einbeziehung einer Rauigkeitslänge für die Wärme  $z_T$  kann auch der für hochaufgelöste mesoskalige Simulationen entscheidende Wärmefluss parametrisiert werden.

Mit dem Turbulenzschema SGS für *Subgrid Scale* Prozesse des LES-Lokal-Modells (LLM) vom DWD (Herzog u. a. 2002) und der Parametrisierung  $k-l$  des Modells ATHAM (Herzog u. a. 2003) sind ein Ein- sowie ein Zweigleichungsmodell in die Programmstruktur von ASAM implementiert worden. Diese unterscheiden sich nicht nur in der Anzahl der zu lösenden Gleichungen für die turbulente kinetische Energie  $k$  und deren Dissipation  $\epsilon$ , sondern auch in der Art der zu berechnenden Diffusionskoeffizienten. So verlangt das SGS-Schema je einen Diffusionskoeffizienten für den Austausch von Impuls und einen für den Wärmeaustausch, während das  $k-l$  Schema nur einen Diffusionskoeffizienten voraussetzt, diesen jedoch in Horizontal und Vertikalkomponente unterscheidet.

Ein Vergleich der Turbulenzschemata, zusammen mit dem schon vorhandenen  $k-\epsilon$  Schema, für den Fall einer neutral geschichteten Atmosphäre zeigt wesentliche Unterschiede. Abgesehen von geringen Abweichungen innerhalb der ersten Gitterzelle am Boden, geben die Turbulenzschemen  $k-\epsilon$  und  $k-l$  das analytisch berechnete logarithmische Windprofil recht gut wider. Hingegen ist das SGS-Schema nicht in der Lage dazu. Grund dafür ist ein höhenkonstanter Diffusionskoeffizient, der für eine annähernd gleichmäßige Verteilung des Impulses innerhalb der Atmosphäre sorgt. Die Größe des Diffusionskoeffizienten wird dabei wesentlich durch die turbulente Längenskala bestimmt. Damit verbunden ist ein beträchtlicher Einfluss der Längenskala auf die Ausbildung von TKE, was mit Parameterstudien nachgewiesen wurde. Je größer die Längenskala umso größere Werte erhält man für den Diffusionskoeffizienten und die TKE. Über die rechte Wahl der Skalierung der turbulenten Längenskala wird z.Zt. international noch heftig diskutiert, sodass eine abschließende Klärung hier nicht gegeben werden kann.

Die Modellberechnungen der Überströmung eines Hindernisses in Form der Funktion nach Agnesi wurden alle basierend auf dem Turbulenzmodell SGS durchgeführt, da dieses auch in den Modellen des DWD, sowie in einem der Vergleichsmodelle (WRF) implementiert ist. Das  $k-l$  Schema wurde im Rahmen dieser Arbeit in das ASAM implementiert, jedoch keiner intensiven Untersuchung unterzogen. Dies wird Bestandteil weiterer Arbeiten sein.

Modellergebnisse des ASAM zur Überströmung eines Agnesi-Berges mit und ohne Reibungsparametrisierung wurden den Ergebnissen vom COAMPS (Doyle und Durran 2002) und eigenen Berechnungen mit dem WRF gegenübergestellt. Ziel war der Vergleich eines Modells mit bodenfolgenden Koordinaten (COAMPS, WRF) zu einem Modell mit kartesischen Koordinaten (ASAM). Alle Modelle bilden im Lee des Berges eine Schwerewelle aus. Die größten Differenzen zeigen sich hinsichtlich Wellenlänge und Entstehungsort der Welle. Zudem ergeben die Simulationen mit ASAM und dem WRF eine größere Anzahl von Rotoren im reibungsbehafteten Fall. Die Annahme, die Modelldifferenzen könnten allein auf dem zu Grunde liegenden Koordinatensystem basieren, wurde mittels der Rechnungen vom WRF teilweise verworfen. Entgegen der Erwartung ähnelten die Ergebnisse der Strömungssimulation mit dem WRF mehr denen vom ASAM als dem Modell mit den gleichen Koordinatensystem (COAMPS). Folglich kann in diesem Fall das Koordinatensystem der



Modelle nur eine geringfügige Rolle in der Ursachenfindung der Modelldifferenzen spielen.

Weitere Untersuchungen zum Einfluss des dem Modell zu Grunde liegenden Advektionsschemas und der Bodenparametrisierung wurden durchgeführt. Die Klärung der starken Modelldifferenzen konnte jedoch auch unter diesen Ansätzen nicht eindeutig nachvollzogen werden. Fakt ist, dass alle Modelle die Überströmung des idealen Gebirges ähnlich reproduzieren, sich jedoch wesentlich im Detail unterscheiden.

Herrscht ein bestimmtes Verhältnis zwischen horizontaler Auflösung zu turbulenter Längenskala, so zeigt sich ein interessanter Effekt in der Simulation mit ASAM. Bei hochaufgelösten Rechnungen mit einer Längenskala kleiner der numerischen Gitterweite bilden sich, anstelle eines Wirbels, mehrere kleine Rotoren unterhalb des Wellenmaximums. Weniger hoch aufgelöste Simulationen zeigen eine Verschiebung des Rotormaximums in Strömungsrichtung. Erst ab einem bestimmten Verhältnis der Längenskala zur Auflösung tritt eine Aufspaltung des Wirbels in diese kleinskaligen Rotoren auf. Die genaue Bestimmung des Verhältnisses und ein Verständnis des Zusammenhanges muss durch weitere Untersuchungen gefördert werden.

Mit den Daten vom T-REX Programm war es möglich auch einen Fall realitätsnaher Gebirgsüberströmung zu rechnen. Zur Modellinitialisierung wurde ein während des T-REX Experimentes gemessenes und nachbereitetes Vertikalprofil vom 25. März 2006 verwendet, mit dem ein Gebirgschnitt der Sierra Nevada überströmt wurde. Die Ergebnisse wurden einem asymmetrischen Agnesi-Berg gegenübergestellt, der der Grundstruktur des Gebirgschnittes entspricht. Leider konnte aufgrund mangelnder Reanalysedaten kein Vergleich mit der tatsächlich eingetretenen meteorologischen Situation erstellt werden. Selbst Gegenüberstellungen von Modellergebnissen anderer Modelle sind aufgrund anhaltender Forschung noch nicht möglich, sodass ich mich auf eine reine Gegenüberstellung zwischen realitätsnaher und idealer Überströmung beschränkt habe.

In näherer Zukunft sollen konkretere Tests und Gegenüberstellungen mit Beobachtungsdaten zu einer weiteren Verbesserung des Modells ASAM führen. Nur durch Simulationen von Überströmungen idealer Hindernisstrukturen kann keine Aussage über die Qualität des Modelles getroffen werden. Sie sind jedoch eine Hilfe beim Verständnis theoretischer Zusammenhänge und dienen dem Vergleich unterschiedlicher Modelle. Auch lassen sich dadurch Parameterstudien zur Verifizierung neuer Mo-

dellparametrisierungen durchführen. Einfache Referenzfälle sind somit unerlässlich zur Modellverifikation, sie ersetzen jedoch nicht den Vergleich mit Beobachtungen.

Ein weiterer Ansatzpunkt zukünftiger Arbeiten liegt in der Simulation dreidimensionaler Hindernisse. Konkav oder konvex zur Strömung liegende Hindernisse, Täler und Verengungen sowie bestimmte aufgeprägte Oberflächenstrukturen sind neben realen Gebirgsstrukturen nur einige ideale Formen von Hindernissen, die man untersuchen kann. Interessant sind dabei sowohl Über- wie auch Umströmungseffekte und die damit einhergehende Entwicklung von turbulenten Ereignissen. Effekte der Corioliskraft dürfen dabei jedoch nicht weiterhin vernachlässigt werden, da diese einen wesentlichen Einfluss auf die Strömungsverhältnisse und die Turbulenz normal zur Strömungsrichtung hat. Nach vollständiger Implementierung der Mikrophysik in das Modell ASAM sollten im Zusammenspiel mit dem Strahlungsmodul auch Simulationen unter Einbezug der verschiedenen Phasen von Wasser möglich sein. Die Entwicklung von Wolken durch Hebung im Luv setzt dabei ebenso interessante Aspekte wie die durch Strahlungseffekte beeinflusste Berg-Talwind-Zirkulation.

# A. Appendix

## A.1. Boussinesq-Approximation

Ausgehend von einer rotations- und reibungsfreien Atmosphäre werden als Ausgangspunkt die Euler'schen Bewegungsgleichungen herangezogen:

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{U} = -\nabla p + \rho \vec{g} , \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \nabla \cdot \vec{U} = 0 , \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{D}{Dt} p - C_s^2 \frac{D}{Dt} \rho = 0 , \quad (\text{A.3})$$

wobei  $C_s = (c_p/c_v) (p/\rho)$  die Schallgeschwindigkeit ist mit  $c_v$  und  $c_p$  als spezifische Wärmekapazität für trockene Luft bei konstantem Volumen bzw. Druck, der Erdbeschleunigung  $\vec{g} = (0, 0, g)$ , sowie dem Differentialoperator:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla . \quad (\text{A.4})$$

Die Gleichungen (A.1) bis (A.3) stehen für die Erhaltung des Impulses, der Masse und der thermischen Energie. Aus letzterer Gleichung wird die Beziehung zwischen Druck und Dichte ersichtlich  $\rho = f(p, T)$ . Es existieren somit neben den Schwerewellen auch akustische Wellen. Betrachtungspunkt sollen die Schwerewellen sein, weswegen versucht werden muss die akustischen Wellen zu eliminieren.

Im folgenden nähern wir uns diesem Problem unter Anwendung der Boussinesq-Approximation auf das Beispiel der Impulserhaltungsgleichungen (A.1). Man separiert Druck und Dichte in einen Hintergrundzustand indiziert mit 0 und eine Störgröße mit dem Index 1:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad , \quad p = p_0 + p_1 \quad . \quad (\text{A.5})$$

Dies nun in (A.1) eingesetzt, ergibt:

$$(\rho_0 + \rho_1) \frac{D}{Dt} \vec{U} = -\nabla p_0 + \rho_0 \vec{g} - \nabla p_1 + \rho_1 \vec{g} \quad . \quad (\text{A.6})$$

Unter der Annahme eines hydrostatischen Gleichgewichts für den Hintergrundzustand, ergibt sich für (A.6) mit der hydrostatischen Grundgleichung (2.23):

$$\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \frac{D}{Dt} \vec{U} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \vec{g} \quad . \quad (\text{A.7})$$

Boussinesq setzt nun die Annahme  $|\rho_1/\rho_0| \ll 1$  und ordnet den Dichteschwankungen des Auftriebsterms eine größere Wichtigkeit zu als denen des Trägheitsterms. Diese Bedingung ist dann erfüllt, wenn die vertikale Skala der mittleren Bewegung der Welle  $\lambda_z$  sehr viel kleiner ist als die mittlere Höhe der isothermen Atmosphäre  $H_s$  (Nappo 2002). Es gilt:

$$\rho(z) = \rho_s e^{x - \frac{gz}{RT_A}} \quad , \quad (\text{A.8})$$

$$H_s = \frac{RT_A}{g} \quad , \quad (\text{A.9})$$

mit  $T_A$  als mittleren Wert für die Temperatur.

Spiegel und Veronis (1960) zeigen als Ergebnis der Boussinesq-Approximation, dass Dichtefluktuationen infolge lokaler Schwankungen des Druckes vernachlässigt werden

können. Folglich ist das Medium als inkompessibel anzusehen. Die akustischen Wellen sind eliminiert und man erhält die inkompressiblen Euler-Gleichungen:

$$\frac{D}{Dt}\vec{U} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\rho_1}{\rho_0}\vec{g}, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{D}{Dt}\rho = 0. \quad (\text{A.12})$$

## A.2. Dirac-Delta-Funktion

Die Dirac-Delta-Funktion  $\delta(x)$ , benannt nach dem britischen Physiker Paul Dirac (1902-1984), filtert einen bestimmten Wert aus einer kontinuierlichen Verteilung von Werten heraus.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Die  $\delta$ -Funktion ist genau genommen gar keine Funktion, sondern eine Distribution, die nur über ihr Integral definiert ist. Dabei liefert die Integration über eine  $\delta$ -Funktion 1, über eine  $\delta$ -Funktion multipliziert mit einer Funktion  $f(x)$  hingegen den Funktionswert von  $f$  an der Stelle 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.14})$$

Als eine Eigenschaft der Dirac-Delta-Funktion ist hier noch die Faltungseigenschaft zu nennen. Diese ermöglicht es eine Ausblendung aller Funktionswerte  $f(x)$  bis auf den für ein bestimmtes Argument  $x = a$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (\text{A.15})$$



# Anhang





# Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

ABL	Atmospheric Boundary Layer
ASAM	All Scale Atmospheric Model
ATHAM	Active Tracer High-resolution Atmospheric Model
CFL	Courant Friedrich Levy Kriterium
DWD	Deutscher Wetterdienst
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
GFB	Grenzflächenbedingung
LES	Large Eddy Simulation
LLM	LES-Lokal-Modell
MGAUS	Mobile GPS Advanced Upper-Air Sounding System
MPI	Message Passing Interface
O	Ost
PBL	Planetary Boundary Layer
RANS	Reynold Averaged Navier Stokes
USA	United States of America
UTC	Coordinated Universal Time
TKE	Turbulent kinetische Energie
T-REX	Terrain-induced Rotor Experiment
W	West
WKB	Wenzel Kramer Brillouin
WRF	Weather Research and Forecasting Model

**Lateinische Symbole**

$A, B$	Wellenamplituden (m)
$a_1, a_2$	Verhältnisse der numerischen Gitterweiten
$b$	Halbwertsbreite eines Berges (m)
$b, b'$	Parameter Bodenparametrisierung für instabile und stabile Schichtung
$b_{up}, b_{down}$	Halbwertsbreite im Luv (up) bzw. Lee (down) des asymmetrischen Agnesi-Berges (m)
$c$	Phasengeschwindigkeit einer Welle ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\vec{c}_g$	Vektor der Gruppengeschwindigkeit einer Welle ( $\text{m s}^{-1}$ )
$c_i$	Parameterfunktion für Bodenparametrisierung in Abhängigkeit von Impuls- oder Wärmefluss
$c_I$	Betrag der Intrinsischen Phasengeschwindigkeit einer Welle ( $\text{m s}^{-1}$ )
$c_k, c_1, c_2, c_3$	Empirische Konstanten für das $k - l$ Modell
$c_m, c_{h1}, c_{h2}$	Empirische Konstanten Lilly-Smagorinsky Modell für Impuls- und Wärmefluss
$c_s, c_{\epsilon 1}, c_{\epsilon 2}$	Empirische Konstanten Lilly-Smagorinsky Modell für Längenskala
$c_\mu, c_{1\epsilon}, c_{2\epsilon}$	Empirische Konstanten $k - \epsilon$ Modell für Impuls und Dissipation
$c_\epsilon$	Empirische Konstante SGS-Modell für Dissipation
$c_p, c_v$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck bzw. Volumen ( $\text{m}^2 \text{K}^{-1} \text{s}^{-2}$ )
$C_s$	Schallgeschwindigkeit ( $\text{m s}^{-1}$ )
$C_D, C_H$	Bulk-Transfer-Koeffizienten für Impuls und Wärmefluss am Boden
$d_i$	Variabler Parameter Bodenparametrisierung in Abhängigkeit von Impuls- bzw. Wärmefluss
$\vec{e}$	Einheitsvektor
$f(\dots, \dots, \dots)$	Analytische Funktion
$f(a_1, a_2)$	Korrekturfaktor der turbulenten Längenskala
$F(y)$	Semi-diskretes Gleichungssystem
$F_m, F_h$	Stabilitätsabhängige Funktionen für Impuls- bzw. Wärmefluss
$F_\rho$	Auftriebskraft ( $\text{kg m s}^{-1}$ )

---

$g$	Betrag der Schwerebeschleunigung ( $\text{m s}^{-2}$ )
$G_m, G_h$	Stabilitäts- und reibungsabhängige Parameterfunktionen für Impuls- und Wärmefluss
$h(\dots)$	Höhenabhängige Funktion eines Hindernisses (m)
$H$	Maximale Höhe des Hindernisses (m)
$H_{ij}$	Wärmefluss ( $\text{m}^2 \text{K s}^{-1}$ )
$H_s$	Höhe der isothermen Atmosphäre (m)
$I$	Einheitsmatrix
$J$	Jacobimatrix, Jacobioperator
$J_T, J_P$	Transport- bzw. Druckterm
$\vec{k}$	Wellenzahlvektor ( $\text{m}^{-1}$ )
$k, l, m$	Wellenzahlen in x,y,z-Richtung ( $\text{m}^{-1}$ )
$k$	Turbulent kinetische Energie ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$k_c$	<i>Cut-Off</i> -Wellenzahl ( $\text{m}^{-1}$ )
$k_s$	Wellenzahl des Hindernisses in x-Richtung ( $\text{m}^{-1}$ )
$kb$	Dimensionslose Wellenzahl
$m_a$	Masse des vom Luftpaket verdrängtem Volumens der Umgebungsluft (kg)
$m_p$	Masse Luftpaket (kg)
$M$	Matrix für Rosenbrock-Schema
$\vec{n}$	Normalenvektor
$N$	Brunt-Väisälä-Frequenz ( $\text{s}^{-1}$ )
$N_i$	Imaginärteil der Brunt-Väisälä-Frequenz ( $\text{s}^{-1}$ )
$p$	Luftdruck ( $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ )
$\tilde{p}$	Fourierkoeffizient des Luftdruckes ( $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ )
$P_k, P_\epsilon$	Scherproduktion für $k$ - bzw. $\epsilon$ -Gleichung ( $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$ )
$Pr$	Prandtlzahl
$Pr_N$	Prandtlzahl für neutral geschichtete Atmosphäre
$q$	Allgemeine Größe
$\tilde{q}$	Fourierkoeffizient der allgemeinen Größe

---

$q_0, q_1$	Hintergrundzustand und Störgröße
$q_t$	Turbulente Geschwindigkeitsskala ( $\text{m s}^{-1}$ )
$q^k$	k verschiedene Phasen von Wasser
$\vec{r}$	Ortsvektor ( $m$ )
$R$	Prandtl-Zahl
$Re$	Realteil einer komplexen Funktion oder Zahl
$R_s$	Spezifische Gaskonstante ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )
$Ri$	Bulk-Richardson-Zahl
$Ri_c$	Kritische Richardson-Zahl
$RiT$	Bulk-Richardson-Zahl unter Einbezug der Rauigkeitslänge für den Wärmefluss
$sgn(\dots)$	Vorzeichenfunktion
$S_{ij}$	Deformationstensor ( $\text{s}^{-1}$ )
$t$	Zeit ( $\text{s}$ )
$T$	Temperatur ( $\text{K}$ )
$T_a, T_p$	Temperatur Umgebungsluft und Luftpaket ( $\text{K}$ )
$u, v, w$	Windgeschwindigkeitsbetrag in x, y, z-Richtung ( $\text{m s}^{-1}$ )
$u_0$	Hintergrundgeschwindigkeit ( $\text{m s}^{-1}$ )
$u_g, w_g$	Betrag der Gruppengeschwindigkeit in x- bzw. z-Richtung ( $\text{m s}^{-1}$ )
$u_*$	Schubspannungsgeschwindigkeit ( $\text{m s}^{-1}$ )
$u_i, u_j$	Windgeschwindigkeit ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\tilde{u}, \tilde{w}$	Fourierkoeffizienten der Windgeschwindigkeit in x- bzw. z-Richtung ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\vec{v}$	Vektor der Windgeschwindigkeit ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\hat{w}$	Neue Vertikalgeschwindigkeit ( $\text{m s}^{-1}$ )
$z$	Vertikale Höhe ( $\text{m}$ )
$z_0, z_T$	Rauhigkeitslänge für Impuls- bzw. Wärmefluss ( $\text{m}$ )
$z_e$	Gleichgewichtshöhe ( $\text{m}$ )

### Griechische Symbole

$\alpha$	Dämpfungskoeffizient
----------	----------------------

---

$\gamma_a$	Atmosphärischer Temperaturgradient ( $\text{K m}^{-1}$ )
$\gamma, \tau$	Parameter Rosenbrock-Schema
$\Gamma$	Adiabatischer Temperaturgradient ( $\text{K m}^{-1}$ )
$\delta z$	Vertikale Auslenkung (m)
$\epsilon$	Dissipation turbulent kinetischer Energie ( $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$ )
$\epsilon_{ijk}$	Tensor nach Levi-Civita
$\theta$	Potentielle Temperatur (K)
$\theta_0$	Potentielle Temperatur in Höhe der Rauigkeitslänge (K)
$\kappa$	Van-Karman Konstante
$\lambda$	Wellenlänge (m)
$\lambda_s$	Wellenlänge des Hindernisses (m)
$\lambda, \Lambda$	Turbulente Längenskala (m)
$\lambda_0, \lambda_0^*$	Gleichgewichtslängenskala (m)
$\nu_m$	kinematische Wirbelviskosität ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\nu_1, \nu_2, \nu_3$	kinematische Wirbelviskosität für x, y, z-Richtung ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\nu_{ij}$	Tensor der kinematischen Wirbelviskosität ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\xi(\dots)$	Verschiebung der Stromlinien (m)
$\rho$	Dichte ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\tilde{\rho}$	Fourierkoeffizient der Dichte ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\rho_a, \rho_p$	Dichte Umgebungsluft bzw. Luftpaket ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\rho_s$	Mittlere Dichte der isothermen Atmosphäre ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	Turbulente Schmidtzahl für $k$ - bzw. $\epsilon$ -Gleichung
$\tau$	Periode einer Schwingung ( $\text{s}^{-1}$ )
$\tau_{ij}$	Reynold Spannungstensor (K)
$\phi$	Phasenwinkel
$\phi_m, \phi_h$	Stabilitätsabhängige Funktionen für Impuls bzw. Wärmefluss
$\Phi$	Stromlinienfunktion
$\Psi_{h,0}$	Parameterfunktion der Bodenparametrisierung
$\omega$	Kreisfrequenz einer Schwingung ( $\text{s}^{-1}$ )

$\omega^n$	Numerische Lösung zum diskreten Zeitpunkt $n$
$\Omega$	Intrinsische Frequenz ( $s^{-1}$ )
$\vec{\Omega}$	Winkelbeschleunigung der Erde ( $s^{-1}$ )

### Tiefgestellter Index

0	0. Ordnung bzw. Hintergrundwert
1	Störgröße
$a$	Umgebungsluft
$p$	Luftpaket
$x, y, z$	x, y, z-Richtung
$i, j, k$	Variable Indizes
$m$	Impuls
$n$	Variabler Index
$h$	Wärmefluss
$hor, ver$	Horizontal- und Vertikalkomponente

### Andere Symbole

$\mathbb{R}$	reeller Zahlenbereich
$\nabla$	Differentialoperator Nabla
$\delta(x)$	Delta-Dirac-Funktion
$\frac{D}{Dt}$	Differentialoperator ( $s^{-1}$ )
$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$	Allgemeine Gitterweiten des Modellgitters (m)
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Gitterweiten des Modellgitters in x, y, z-Richtung (m)
$\Delta s$	Mittlere Auflösung des numerischen Gitters (m)
$\Delta\Theta_0, \Delta\Theta_T$	Temperaturdifferenz zur Rauigkeitshöhe des Impuls- bzw. Wärmeaustausches am Boden (K)
$\overline{(\dots)}$	Reynold-gemittelte Größe
$\widehat{(\dots)}$	Favre-gemittelte Größe
$(\dots)'$	Schwankungsgröße Reynold's-Mittelung
$(\dots)''$	Schwankungsgröße Favre-Mittelung







# Literaturverzeichnis

*Hinweis:* Es wurden sowohl Print- wie Online-Ressourcen berücksichtigt. Sind in der Bibliographie beide Formen verzeichnet, so ist, den Argumenten für eine bessere Zugänglichkeit der wissenschaftlichen Literatur in dieser Diplomarbeit folgend, die frei zugängliche elektronische Fassung für das Zitat maßgeblich. Dies schließt natürlich nicht aus, dass für reine Print-Zitate etwaige Online-Versionen existieren können.

Unspezifische URLs (Domains oder kurze Gliederungsebenen) werden im laufenden Text genannt. Ein Datum des Zugriffs ist dort nur dann angegeben, wenn es sich um konkrete Dateien oder Zahlenangaben handelt.

**Bougeault 1983** BOUGEAULT, P.: A non-reflective upper boundary condition for limited-height hydrostatic models. In: *Monthly Weather Review* 111 (1983), S. 420–429

**Brown u. a. 1994** BROWN, A. R. ; DERBYSHIRE, S. H. ; MASON, P. J.: Large-eddy simulation of stable atmospheric boundary layers with a revised stochastic subgrid model. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 120 (1994), S. 1485–1512

**Burchard 2002** BURCHARD, H.: *Applied Turbulence Modelling in Marine Waters*. 1. Aufl. Springer, 2002

**Cohn u. a. 2004** COHN, S. ; GRUBISIC, V. ; BILLINGS, B.: The Sierra Rotors Project, Observation of Mountain Waves. In: *13th Symposium on Meteorological Observations and Instrumentation* (2004)

**Deardorff 1980** DEARDORFF, J. W.: Stratocumulus-capped mixed layers derived from a three-dimensional model. In: *Boundary-Layer Meteorology* 18 (1980), S. 459–527

**Dickey und Mellor 1980** DICKEY, T. D. ; MELLOR, G. L.: Decaying turbulence in neutral and stratified fluids. In: *Journal of Fluid Mechanics* 99 (1980), S. 13–31

- Doyle und Durran 2002** DOYLE, J. D. ; DURRAN, D. R.: The Dynamics of Mountain-Wave-Induced Rotors. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 59 (2002), S. 186–201
- Doyle und Durran 2007** DOYLE, J. D. ; DURRAN, D. R.: Rotor and Sub-Rotor Dynamics in the Lee of Three Dimensional Terrain. In: *Journal of Atmospheric Sciences* (2007). – in Druck
- Durran 2003** DURRAN, D.: Lee Waves and Mountain Waves. In: *Encyclopedia of Atmospheric Sciences* (2003), S. 1161–1169
- Dörnbrack u. a. 2006** DÖRNBRACK, A. ; HEISE, R. ; KUETTNER, J. P.: Wellen und Rotoren. In: *Promet* 32 (2006), S. 18–24. – Nr. 1/2
- Fröhlich 2006** FRÖHLICH, J.: *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. 1. Aufl. B. G. Teubner, 2006
- Fu und Liou 1993** FU, Q. ; LIOU, K. N.: Parameterization of the radiative properties of cirrus clouds. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 50 (1993), S. 2008–2025
- Gallus 2000** GALLUS, W. A.: Behaviour of Flow over Step Orography. In: *Monthly Weather Review* 128 (2000), S. 1153–1164
- Gatti-Bono und Colella 2006** GATTI-BONO, C. ; COLELLA, P.: An anelastic allspeed projection method for gravitationally stratified flows. In: *Journal of Computational Physics* 216 (2006), S. 589–615
- Grubisic u. a. 2004** GRUBISIC, V. ; DOYLE, J. D. ; KUETTNER, J. ; POULOS, G. S. ; WHITEMAN, C. D. ; ARMI, L. ; BAISLEY, B. ; BANTA, R. ; BROWN, P. ; CHOW, F. ; COHN, S. ; COTTON, W. ; DEMOZ, B. ; DEWEKKER, S. ; DÖRNBRACK, A. ; DURRAN, D. ; ECKERMANN, S. ; FRITTS, D. ; FREHLICH, R. ; HEYMSFIELD, A. ; HERTENSTEIN, R. ; HOOPER, W. ; INTRIERI, J. ; JIANG, Q. ; KAPLAN, M. ; LANE, T. ; LIN, Y.-L. ; MAYOR, S. ; MAYR, G. ; MEILLIER, Y. ; MOBBS, S. ; PAN, L. ; SHARMAN, R. ; SMITH, R. B. ; STREET, R. ; VOSPER, S. ; WEISSMANN, M. ; ZHONG, S.: T-REX Terrain-Induced Rotor Experiment, Overview Document and Experiment Design. (2004). – URL [http://www.eol.ucar.edu/projects/TREX/T-REX-SOD\\_part1.pdf](http://www.eol.ucar.edu/projects/TREX/T-REX-SOD_part1.pdf). – Zugriffsdatum: 28. November 2007
- Herzog u. a. 2002** HERZOG, H.-J. ; SCHUBERT, U. ; VOGEL, G. ; FIEDLER, A. ; KIRCHNER, R.: LLM - the High-Resolving Nonhydrostatic Simulation Model in the DWD -

- Project LITFASS, Part 1: Modelling Technique and Simulation Method / Deutscher Wetterdienst. 2002 (4). – COSMO Technical Report
- Herzog u. a. 2003** HERZOG, M. ; OBERHUBER, J. M. ; GRAF, H.-F.: A Prognostic Turbulence Scheme for the Nonhydrostatic Plume Model ATHAM. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 60 (2003), S. 2783–2796
- Hines 1960** HINES, C. O.: Internal Atmospheric Gravity Waves at Ionospheric Heights. In: *Canadian Journal of Physics* 38 (1960), S. 1441–1481
- Holton 1992** HOLTON, J.R.: *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Academic Press, 1992
- Horn 2006** HORN, S.: *Implementierung eines Strahlungsmodells in das Strömungsmodell ASAM und Untersuchung der Einflüsse solarer Einstrahlung auf die Strömungsverhältnisse in Strassenschluchten*, Institut für Troposphärenforschung, Leipzig; Leipziger Institut für Meteorologie, Universität Leipzig, Diplomarbeit, 2006
- Izumi 1971** IZUMI, Y.: Kansas 1968 Field Program Data Report / Air Force Cambridge Research Lab., Bedford, MA. 1971. – Environmental Research Papers No.379, AFC RL-72 0041
- Kaimal und Wyngaard 1990** KAIMAL, J. C. ; WYNGAARD, J. C.: The Kansas and Minnesota experiments. In: *Boundary-Layer Meteorology* 50 (1990), S. 31–47
- Klemp und Durran 1983** KLEMP, J. ; DURRAN, D. R.: An upper boundary condition permitting internal gravity wave radiation in numerical mesoscale models. In: *Monthly Weather Review* 111 (1983), S. 430–444
- Lanser u. a. 2001** LANSER, D. ; BLOM, J. G. ; VERWER, J. G.: Time integration of the shallow water equations in spherical geometry. In: *Journal of Computational Physics* 171 (2001), S. 373–393
- Launder und Sharma 1974** LAUNDER, B. E. ; SHARMA, B. I.: Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc. In: *Letters in Heat and Mass Transfer* 1 (1974), S. 131–138
- Lenderink und Holtslag 2004** LENDERINK, G. ; HOLTSLAG, A. A. M.: Evaluation of current surface flux parametrization schemes in limited area and large scale models using FIFE and HAPEX-Sahel measurements. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 130 (2004), S. 3405–3427

- Lewellen 1977** LEWELLEN, W. S.: *Use of invariant modeling. Handbook of Turbulence.* Plenum Press, 1977
- Lilly 1964** LILLY, D. K.: On the numerical simulation of bouyant convection. In: *Tellus* 14 (1964), S. 148–172
- Lilly 1978** LILLY, D. K.: A Severe Downslope Windstorm and Aircraft Turbulence Event Induced by a Mountain Wave. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 35 (1978), S. 59–77
- Lilly und Kennedy 1973** LILLY, D. K. ; KENNEDY, P. J.: Observations of a Stationary Mountain Wave and its Associated Momentum Flux and Energy Dissipation. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 30 (1973), S. 1135–1152
- Louis 1979** LOUIS, J. F.: A Parametric Model of Vertical Eddy Fluxes in the Atmosphere. In: *Boundary-Layer Meteorology* 17 (1979), S. 187–202
- Monin und Yaglom 1971** MONIN, A. S. ; YAGLOM, A. M.: *Statistical Fluid Mechanics-Mechanics of Turbulence.* Vol.1. Massachusetts Institute of Technology Press, 1971
- Nappo 2002** NAPPO, C.J.: *International Geophysics Series.* Bd. 85: *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves.* Academic Press, 2002
- Orlanski 1976** ORLANSKI, I.: A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. In: *Journal of Computational Physics* 21 (1976), S. 251–269
- Queney 1948** QUENEY, P.: The problem of air flow over mountains: a summary of theoretical studies. In: *Bulletin of American Meteorological Society* 29 (1948), S. 16–25
- Rampanelli und Zardi 2004** RAMPANELLI, G. ; ZARDI, D.: Mechanisms of Up-Valley Winds. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 61 (2004), S. 3097–3111
- Schimmel 2002** SCHIMMEL, F.: *Development and Test of an Atmospheric Flow Model Employing Adaptive Numerical Methods,* Fachbereich Geowissenschaften Universität Hamburg, Dissertation, 2002
- Scotti u. a. 1993** SCOTTI, A. ; MENEVEAU, C. ; LILLY, D. K.: Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids. In: *Physics of Fluids* 5 (1993), Nr. 9, S. 2306–2308
- Skamarock u. a. 2005** SKAMAROCK, W. C. ; KLEMP, J. B. ; DUDHIA, J. ; GILL, D. O. ; BARKER, D. M. ; WANG, W. ; POWERS, J. G.: A Description of the Advanced Research

WRF Version 2 / Mesoscale and Microscale Meteorology Division. 2005 (NCAR/TN-468+STR). – NCAR Technical Note. letzte Änderung Januar 2007

**Smagorinsky 1963** SMAGORINSKY, S.: General circulation experiments with the primitive equations. In: *Mon. Weather Rev.* 91 (1963), S. 99–164

**Spiegel und Veronis 1960** SPIEGEL, E. A. ; VERONIS, G.: On the Boussinesq Approximation for a Compressible Fluid. In: *Astrophysical Journal* 131 (1960), S. 442–447

**Stevens u. a. 1999** STEVENS, B. ; MOENG, C.-H. ; SULLIVAN, P. P.: Large-eddy simulations of radiatively driven convection: Sensitivities to representation of small scales. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 56 (1999), S. 3963–3984

**Sweby 1984** SWEBY, P. K.: High resolution schemes using flux-limiters for hyperbolic conservation laws. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 21 (1984), S. 995–1011

**Uno u. a. 1995** UNO, I. ; CAI, X.-M. ; STEYN, D. G. ; EMORI, S.: A Simple Extension of the Louis Method for Rough Surface Layer Modelling. In: *Boundary-Layer Meteorology* 76 (1995), S. 395–409

**Wai und Smith 1995** WAI, M.-K. ; SMITH, E. A.: Evaluation of current surface flux parametrization schemes in limited area and large scale models using FIFE and HAPEX-Sahel measurements. In: *Journal of Geophysical Research* 100 (1995), S. 25645–25664



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Diplomarbeit begleitet und unterstützt haben.

Herrn Prof. Dr. E. Renner danke ich für die Bereitstellung des interessanten Themas und die Begutachtung dieser Arbeit.

Für die Übernahme des Zweitgutachten bin ich Herrn Dr. A. Raabe sehr dankbar.

Besonderer Dank gilt meinem Betreuer Dr. O. Knoth, welcher mir bei Fragen und Problemstellungen während dieser Arbeit stets hilfsbereit zur Seite stand. Seine Ratschläge und Anmerkungen haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ebenso danke ich Verena Grützun für deren konstruktive Kritik und das sehr sorgfältige Korrekturlesen.

Zu erwähnen sei noch das wunderbare Arbeitsklima innerhalb der Abteilung für Modellierung am IfT. Bei Problemen standen mir alle Türen offen und ein jeder nahm sich Zeit zur Diskussion.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie und besonders meinen Eltern danken, die mir das Studium ermöglicht haben.





# Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Elmar Filaus, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der im Quellenverzeichnis aufgeführten Literatur- und sonstigen Informationsquellen verfaßt zu haben.

Ich erkläre mich einverstanden, dass meine Diplomarbeit nach positiver Begutachtung zur Benutzung in der Zweigstelle Geowissenschaften der Universitätsbibliothek Leipzig sowie in der Bibliothek des Leibniz-Instituts für Troposphärenforschung Leipzig e.V. zur Verfügung steht.

Leipzig, 30. November 2007

Elmar Filaus

