

Diplomarbeit

Diskretisierung des Spannungstensors der 2-Dimensionalen Navier-Stokes Gleichungen auf logischen Rechteckgittern

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Mathematiker (FH)

der

Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig (FH)

Fakultät: Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

vorgelegt von

Mathias Erfurth

20. Februar 2011

Betreut durch:

- Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Engelmann
- Dr. Oswald Knoth

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	4
1. Einleitung	5
1.1. Motivation	5
1.2. Spannungstensor und Differentialoperatoren	6
1.3. Ziel der Arbeit	7
2. Logische Rechteckgitter	9
2.1. Einführung und Eigenschaften	9
2.2. Duales Gitter	13
2.3. Geometrie	14
2.3.1. Tangentenvektor	14
2.3.2. Normalenvektor	15
2.3.3. Der Mittelpunkt	15
2.3.4. Flächeninhalt	16
3. Diskrete Vektorfelder und Integralsätze	18
3.1. Diskrete Repräsentation von Vektorfeldern auf logischen Rechteckgittern	18
3.2. Piola Transformation	20
3.3. Integralsätze	21
3.3.1. Gaußscher Integralsatz (Divergenzsatz)	21
3.3.2. Stokesscher Integralsatz (Rotationssatz)	23
3.3.3. Mittelwertsatz der Integralrechnung	26
4. Diskretisierung des Spannungstensors	27
4.1. Der Spannungstensor	27
4.2. Diskrete Berechnung	27
4.2.1. Berechnung der Rotation (rot)	27
4.2.2. Berechnung der Rotation (Curl) der Drehbewegung (rot)	30
4.2.3. Berechnung der Divergenz	32
4.2.4. Berechnung des Gradienten der Divergenz	33

5. Numerische Beispiele	39
6. Schlussbemerkungen	41
6.1. Fazit	41
6.2. Ausblick	41
Literaturverzeichnis	I
Abbildungsverzeichnis	II
A. Quellcode	IV

Abkürzungsverzeichnis

Bsp.	Beispiel
\mathbf{v}	Vektor-/Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$
∇	Nabla Operator in kartesischen Koordinaten $\left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right)^T$
$\nabla \mathbf{v}$	Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T$
\mathbf{e}_i	Kante i eines primalen Rechteckelements mit $i \in \{E, N, W, S\}$
$ \mathbf{e}_i $	Länge Kante i eines primalen Rechteckelements mit $i \in \{E, N, W, S\}$
\mathbf{t}_i	Tangente der Kante $i \in \{E, N, W, S\}$

1. Einleitung

1.1. Motivation

In der Wissenschaft, Technik und selbst in der Wirtschaft gewinnen Differentialgleichungen und speziell die partiellen Differentialgleichungen immer mehr an Bedeutung. Leider ist es nicht immer möglich, eine explizite Lösung dieser Gleichungen bei gegebenen Anfangsbedingungen analytisch zu ermitteln, **noch die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Lösung zu beweisen**. Aus diesem Grund greift man auf numerische Lösungsverfahren zurück, welche jedoch, abhängig von der geforderten Genauigkeit der Lösung und der Rechenleistung des eingesetzten Computers, sehr Zeitintensiv sein können. Aus diesem Grund ist die Entwicklung immer neuer Verfahren mit hoher Konvergenzordnung in der Wissenschaft von enormer Bedeutung. Diese Diplomarbeit wird sich mit einem Teil der ältesten Modelle der Strömungsmechanik befassen. Dem Term des Spannungstensors der Navier Stokes-Gleichungen. Diesen gilt es zu diskretisieren. Für die Diplomarbeit bedeutet das, dass man ein stetiges Modell, in diesem Fall ein Vektorfeld $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$, mit $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, durch ein Modell mit einer endlichen Anzahl von konkreten Vektoren approximiert. Weiter werden, zur Konvergenz- und Fehlerbetrachtung, verschiedene Testfunktion für die einzelnen Vektorkomponenten genutzt. Das heißt, dass die Vektorkomponenten in bestimmten Punkten konkret berechnet werden und ab diesem Zeitpunkt nur noch als diskrete Werte für sämtliche Berechnungen zur Verfügung stehen. Für Vektoren, welche an anderer Stelle innerhalb einer Zelle zur Rechnung benötigt werden, wird die so genannte Piola-Transformation vorgestellt, welche eine Vektorrekonstruktion der bekannten diskreten Vektoren erlaubt. Die Punkte, an denen diese diskreten Vektoren berechnet werden, hängen von der Wahl des Gitters ab, mit welchem der zu diskretisierenden Raum überdeckt wird. Die späteren Diskretisierungen werden auf einem versetzten Gitter durchgeführt. Die in der Diplomarbeit angewendete Methode ist die der finiten Elemente.

Zunächst soll eine spezielle Schreibweise des Tensors, erst in kartesischen Koordinaten eingeführt, und später in Gebietsintegrale überführt werden.

In Kapitel 1 wird die Darstellung des Spannungstensors in kartesischen Koordinaten, sowie die Darstellung in koordinatenfreier Schreibweise eingeführt und damit das Ziel der Arbeit definiert. In Kapitel 2 werden zunächst die logischen Rechteckgitter vorgestellt, sowie die globalen Notationen eines Gitters eingeführt. Weiter wird die, für die späteren Berechnungen notwendige, [Geometrie](#) charakterisiert und deren Berechnungsvorschriften angegeben. Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Repräsentation diskreter Vektorfelder, sowie einer Methode zur Annäherung unbekannter Potentialwerte des Gitters. Die für die Überführung der Gebietsintegrale in Kurvenintegrale notwendigen Integralsätze, werden in diesem Kapitel definiert, und in Kapitel 4 auf die in Kapitel 1 vorgestellten Differentialoperatoren angewendet. Es folgt in Kapitel 5 die Auswertung anhand ausgewählter Beispiele. Abschliessend beschäftigt sich Kapitel 6 mit den Schlussfolgerungen der gewonnenen Daten, sowie einer Abschätzung des Nutzens dieses Verfahrens auf die restlichen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen.

1.2. Spannungstensor und Differentialoperatoren

In der Meteorologie spielen meist kompressible Strömungen eine Rolle. Das heißt, dass sich das Medium, welches durch die Strömung bewegt wird, hier Gasteilchen, komprimieren lässt und sich somit, im zeitlichen Verlauf, eine Druckänderung ergeben kann. Die Navier-Stokes-Gleichungen für den kompressiblen Fall sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}, \\
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \underbrace{-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{Advektionsterm}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\mu \left(\left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right] \right)}_{\text{Spannungstensor}}, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} &= \underbrace{-u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{Advektionsterm}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\mu \left(\left[2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right)}_{\text{Spannungstensor}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Hierbei sind u, v die Komponenten eines Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$. Weiter sei mit p die Druckfunktion gemeint und mit ρ und μ werden der Kompressibilitätskoeffizienten und Viskositätskoeffizient beschrieben. Der Term des Spannungstensors hängt also nur vom Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} ab. Der Spannungstensor ist, rein formal, eine Matrix, in welcher die Scherspannungen an bestimmten Punkten im Raum (bzw. im zwei-dimensionalen auf einer Fläche) beschrieben werden. Mittels der, in kartesischen

Koordinaten definierten, Differentialoperatoren Gradient

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u(x, y) & v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

und Divergenz

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x, y) & v(x, y) \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.3)$$

kann dieser in ~~koordinatenfreier~~ Form dargestellt werden durch

$$\mu \left[\mathbf{div} \left(\mathbf{grad}(\mathbf{v}) + (\mathbf{grad}(\mathbf{v}))^T \right) - \frac{2}{3} \mathbf{grad}(\mathbf{div}(\mathbf{v})) \right]. \quad (1.4)$$

Durch die Einführung zweier weiterer Differentialoperatoren kann dieser erneut umgeschrieben werden. Der erste wird Rotation (im englischen auch Curl) genannt. Jedoch ist dieser nur im drei-dimensionalen Raum erklärt, da er durch das Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit einem Geschwindigkeitsfeld berechnet wird. In kartesischen Koordinaten ist die Raotation für ein Vektorfeld $\mathbf{v} = (u, v, w)$ in Determinatenschreibweise gegeben durch

$$\mathbf{Curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (1.5)$$

Der zweite Operator ist die Drehbewegung der x, y -Ebene, welche „**rot**“ genannt wird. Diese ist ein Spezialfall der Rotation (welcher in englischer Literatur auch des Curl genannt wird). Sie ist gegeben durch

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.6)$$

Der später zu diskretisierende Spannungstensor hat nun die Form

$$\mu \left[\frac{4}{3} \mathbf{grad}(\mathbf{div}(\mathbf{v})) - \mathbf{curl}(\mathbf{rot}(\mathbf{v})) \right]. \quad (1.7)$$

1.3. Ziel der Arbeit

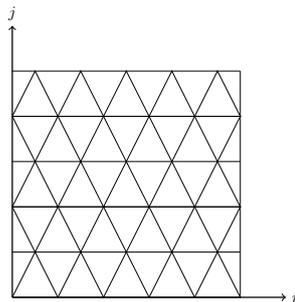
Das Ziel der Diplomarbeit ist nun, die vier Differentialoperatoren **div**, **rot**, **grad** und **curl** in Integralform zu schreiben und mittels bekannter Integralsätze (Satz von Gauß

[3.3.1], Satz von Stokes [3.3.2]), in ein Kurvenintegral erster Ordnung zu überführen. Durch die Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung [3.3.3] soll dieses dann approximiert werden. Für einige ausgewählte Vektorfelder soll später die Konsistenz des Verfahrens geprüft werden. Das heißt der Fehler wird für verschiedene Schrittweiten des Gitters beobachtet, welcher eine Aussage über dessen Konvergenzordnung zulässt.

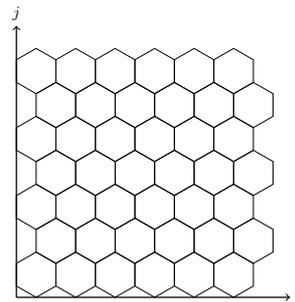
2. Logische Rechteckgitter

2.1. Einführung und Eigenschaften

Eine der Bedingungen bei der diskreten Betrachtung von gewöhnlichen- als auch partiellen Differentialgleichungen ist die Wahl der Triangulierung des Teilraums $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, auf dem die Differentialgleichung gelöst werden soll. Dieser wird auch Gitter genannt. Für die nachfolgenden Diskretisierungen soll Ω mit einer Gitterstruktur überdeckt werden, welche Ω in einzelne Polygonale Teilgebiete zerlegt. Dies kann unter anderem mit Dreiecks-, Vierecks- oder auch Sechseckselementen erfolgen [siehe Abbildung 2.1]. Für



2.1.1: Dreiecksgitter



2.1.2: Hexagonalgitter

Abbildung 2.1.: Beispiele für weitere Gitter-arten

die weiteren Überlegungen konzentriert sich die Diplomarbeit auf eine Zerlegung mit Viereckselementen $\Omega_{i,j}$, wobei $\Omega_{i,j}$ durch seine vier Punkte

$$\Omega_{i,j} = \left\{ \mathbf{x}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \mathbf{x}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \mathbf{x}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \mathbf{x}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\},$$

gegeben ist, siehe Abbildung 2.2.1. Die eigentliche Zelle ist nun die konvexe Hülle dieser vier Punkte. Der globale Punkt $\mathbf{x}_{i,j}$ hat dabei die Koordinaten $(x_{i,j}, y_{i,j})$, ~~wobei dieser den Mittelpunkt des logischen Rechtecks bezeichnet.~~ Weiterhin wird vorausgesetzt, dass alle Viereckselemente $\Omega_{i,j}$ konvex sind, d.h. dass ein Punkt \mathbf{x} , welcher durch konvexe

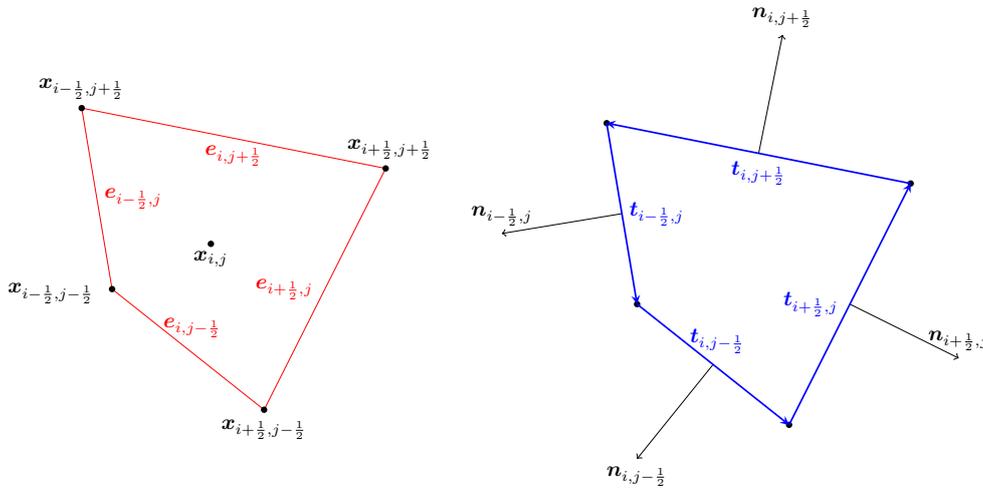
Linearbombination der Eckpunkte von $\Omega_{i,j}$ gebildet wird, wieder in $\Omega_{i,j}$ liegt. Also

$$\alpha_1 \mathbf{x} \left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} \right) + \alpha_2 \mathbf{x} \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} \right) \Leftrightarrow \alpha_3 \mathbf{x} \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right) + \alpha_4 \mathbf{x} \left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right) \in \Omega_{i,j},$$

mit $\sum_{k=1}^4 \alpha_k = 1$, sowie $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, 3, 4$. Es sei nun

$$\Omega = \left\{ \bigcup_{\forall i,j} \Omega_{i,j} : i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_y \right\},$$

zudem ist $\bigcap_{\forall i,j} \widehat{\Omega}_{i,j} = \emptyset$, wobei $\widehat{\Omega}_{i,j}$ die inneren Punkte von $\Omega_{i,j}$ bezeichnet. Eine derartige Zerlegung von Ω soll im weiteren als *logisches Rechteckgitter* bezeichnet werden. Das klassische kartesische Rechteckgitter ergibt sich als Spezialfall, wobei die x -Koordinate nur noch von i , bzw. die y -Koordinaten nur noch von j abhängig ist. Dies zeigt, dass es nur noch nötig ist, die Anzahl von $n_x + n_y$ Koordinaten zu speichern, um das Gesamte Gitter zu bestimmen. Für ein logisches Rechteck sind dazu alle $(n_x n_y)$ Koordinaten nötig. Dies Vereinfacht also einen Punkt $\mathbf{x}_{i+1,j+1} = (x_i + 1, y_j + 1)$.



2.2.1: Kanten und Eckpunkte

2.2.2: Tangenten und Normalen

Abbildung 2.2.: Notationen eines logischen Rechtecks

Man spricht von logischen Rechteckgittern, da diese dieselben topologischen Eigenschaften besitzen, wie die klassischen kartesischen Rechteckgitter. Insbesondere bleiben alle Nachbarschaftsrelationen erhalten, was sich vorteilhaft bei der späteren Implementierung zeigt. Durch die Einführung gebrochener Indizes ist nicht nur die genaue Lage eines Punktes sofort erkennbar (Rand-, Eck- oder Zellinnerer Punkt), sondern auch die Position einer möglichen Linearkombination kann mittels dieser Indizes berechnet wer-

den. Weiter sind in Abbildung [2.2] die für spätere Rechnung benötigten Kanten (bzw. deren Längen), Normalen und Tangenten zu sehen.

Beispiele

Mittels Koordinatentransformation lassen sich aus kartesischen Rechteckgittern logische Rechteckgitter erzeugen. Bekannte ~~Beispiel~~ dafür sind die Transformation mittels Polarkoordinaten (einem Spezialfall der sphärischen Koordinaten) und die, ebenfalls in der Meteorologie verwendeten, bodenfolgenden Koordinaten. Durch die Transformationen existieren nun zwei Räume. Der Raum der untransformierten Koordinaten wird Rechenraum (im englischen als computational grid bekannt) genannt, und der Raum der transformierten Koordinaten wird als physischer Raum bezeichnet (im englischen als physical grid bezeichnet), siehe Abbildung x . Der physische Raum beschreibt dabei die Geometrie eines realen Objektes, also beispielsweise eines runden Gefäßes (Polarkoordinaten) oder den Querschnitt eines Berges (bodenfolgende Koordinaten) ~~und der Rechenraum die einfache Geometrie eines Gitters.~~ Durch die inverse Transformation ist es möglich, bekannte Meßwerte im physischen Raum an die äquivalenten Positionen im Rechenraum zu positionieren. Dies führt zwar zu einer einfacheren Metrik im Rechenraum, jedoch verändern sich durch die Transformation auch die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation. Die folgenden Transformationen beziehen sich nur auf die Koordinaten der Eckpunkte der einzelnen Gitterzellen. Die Zellränder sind dann durch die konvexe Hülle dieser Punkte gegeben.

Die Transformation der Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Mit

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= -\mu \left(2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot u) \right), \\ \tau_{\varphi\varphi} &= -\mu \left(2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right] - \frac{2}{3} (\nabla \cdot u) \right), \\ \tau_{r\varphi} &= -\mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u_\varphi}{r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right),\end{aligned}\tag{2.2}$$

ist der Spannungstensor in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{r\varphi}) + \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\tau_{r\varphi}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_{\varphi\varphi}) \right).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Aufgrund dieses komplexen Ausdrucks und der damit verbundenen recht aufwendigen Berechnung, konzentriert sich die Diplomarbeit auf den physischen Raum. Um die Singularität im Koordinatenursprung auszugleichen, werden die in Kapitel [5], sowie in Abbildung [2.3] Berechnungen auf diesem Gittertyp im Ursprung ausgelassen. Die Trans-

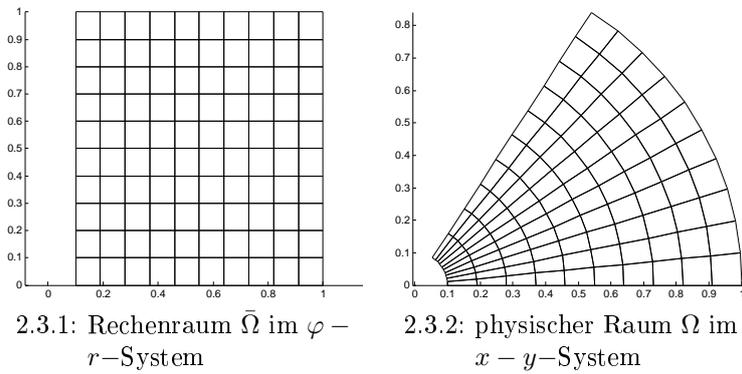


Abbildung 2.3.: Rechen- und physischer Raum der Transformation durch Polarkoordinaten

formation bodenfolgender Koordinaten lautet

$$\begin{aligned}x &= \varsigma, \\ z &= z_s(\varsigma) + \frac{\eta(H - z(\varsigma))}{H},\end{aligned}\tag{2.4}$$

wobei $z_s(\varsigma)$ die Funktion bezeichnet, welche die Bodenstruktur beschreibt und mit H die maximale Höhe des Gitters gemeint ist, siehe [8]. Die in Abbildung 2.4.2 genutzte Funktion wird als *Witch of Agnesi* bezeichnet und ist gegeben durch

$$z_s(\varsigma) = h \left(1 + \left(\frac{\varsigma - \varsigma_m}{a} \right)^2 \right)^{-1},\tag{2.5}$$

mit h ist hier das Maxima der Funktion gemeint, wobei $h \leq H$, und mit ς_m Ort des Maxima der Funktion. Mit a wird der Parameter bezeichnet, welcher die Höhe des Anstieges um das Maxima beeinflusst. Diese Funktion wird nur für Testzwecke eingesetzt. In der Praxis gewinnt man durch Messungen diskrete Höhenwerte. Diese werden mittels Splinefunktionen verbunden und geben so eine Approximation eines realen Terrains

wieder.

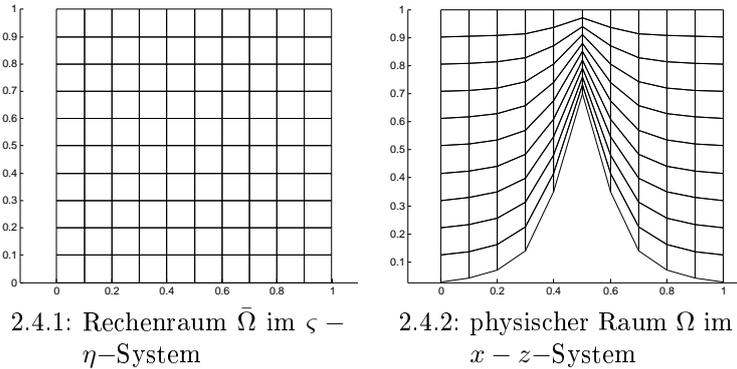


Abbildung 2.4.: Rechen- und physischer Raum der Transformation durch bodenfolgende Koordinaten

2.2. Duales Gitter

Dualität bedeutet im allgemeinen eine Beziehung zwischen zwei Objekten. Hier beschreibt sie die Beziehung zwischen der Zerlegung von Ω , welches auch primales Gitter genannt wird, und dem Gitter, welches entsteht, wenn die Mittelpunkte der Zellen mit deren Kantenmittelpunkten verbunden werden. Eine duale Gitterzelle hat nun die Eckpunkte $\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2},j}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1,j}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1,j+\frac{1}{2}}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1,j+1}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2},j+1}, \tilde{\mathbf{x}}_{i,j+1}, \tilde{\mathbf{x}}_{i,j+\frac{1}{2}}$, siehe Abbildung [2.5.1]. Weiter sind Funktionen, Punkte und Vektoren dualer Zellen durch „ $\tilde{}$ “ gekennzeichnet. Das Gebiet, welches durch dieses Vieleck umschlossen wird nennt man auch Wechselwirkungsvolumen. Nun ist das duale Gitter, also die Menge aller Wechselwirkungsvolumen, gegeben durch

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \tilde{\Omega}_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n_x - 1, j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \right\}. \quad (2.6)$$

Durch die Verbindung dieser Eckpunkte ist es möglich, den Rand einer dualen Zelle, als geschlossene Randkurve zu betrachten. Dies ist die Voraussetzung, für die später folgenden Integralsätze. Weiter werden in der Diplomarbeit nur die inneren bzw. nur geschlossene dualen Zellen betrachtet. Die dualen Zellen des Randes sind nicht Gegenstand dieser Arbeit. Bei den in der Diplomarbeit verwendeten versetzten Gittern [3.1] sind die Komponenten des Vektors eines diskreten Geschwindigkeitsfeldes in Normalenrichtung bekannt. Jedoch stehen die Tangentenvektoren der Kanten- und Zellenmittelpunkte nur in Spezialfällen logischer Rechteckgitter senkrecht auf diesen Kanten. Aus diesem Grund

ist es notwendig, die Vektorkomponenten durch Vektorrekonstruktion auf allen 8 Verbindungsstrecken neu zu berechnen.

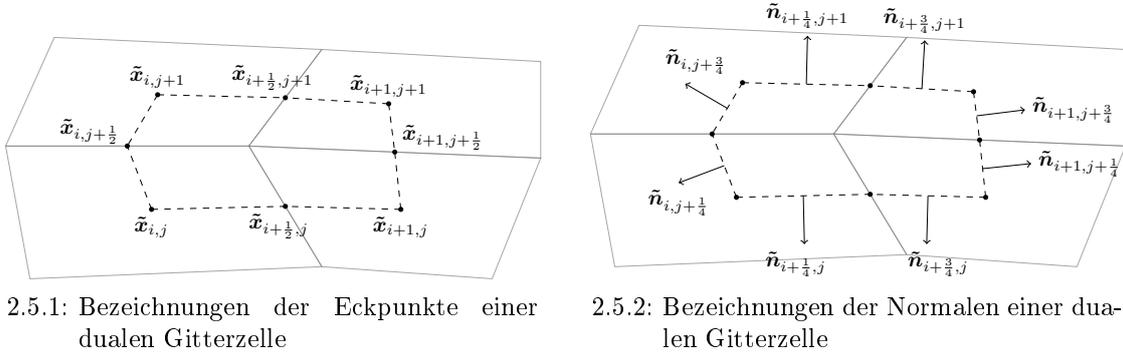


Abbildung 2.5.: Primales Gitter (grau) und globale Notationen einer dualen Gitterzelle $\tilde{\Omega}_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n_x - 1$, $j = 1, 2, \dots, n_y - 1$

2.3. Geometrie

Für die spätere Diskretisierung wird eine genauere geometrische Charakterisierung der primalen- und dualen Gitterzellen benötigt. Insbesondere benötigt man die Längen, Flächeninhalte, sowie die Normalen- und Tangentialen Vektoren der Kanten. Aus Gründen der Übersicht werden diese Berechnungen mittels lokaler Indizierung eingeführt. Als Orientierung für die Notation der Kanten \mathbf{e}_i , sowie die der Normalen- \mathbf{n}_i und Tangentialen Vektoren \mathbf{t}_i einer Zelle, werden die vier Himmelsrichtungen $i \in \{E, N, W, S\}$ verwendet, siehe Abbildung 2.6. Da duale Gitterzellen aus 8 Kanten bestehen, reicht die Notation der vier Haupt-Himmelsrichtungen leider nicht mehr aus. Deswegen wird die Notation dualer Zellen um einen Zifferindex erweitert. Vektoren, welche in den Mittelpunkten primaler Zellen ihren Ursprung haben, werden mit einer eins an der Himmelsrichtung versehen und die anderen, deren Ursprung im Mittelpunkt einer Kante liegt mit einer zwei, siehe dazu Abbildung 2.5.1 und Abbildung 2.5.2.

2.3.1. Tangentenvektor

Als Tangentenvektor wird derjenige Vektor bezeichnet, welcher zwei Punkte miteinander verbindet. Sein Betrag $|\mathbf{t}_i|$ ist gleich der Länge des Abstandes zwischen diesen zwei Punkten. Dieser wird später zur Beschreibung der Kanten der primalen- und dualen

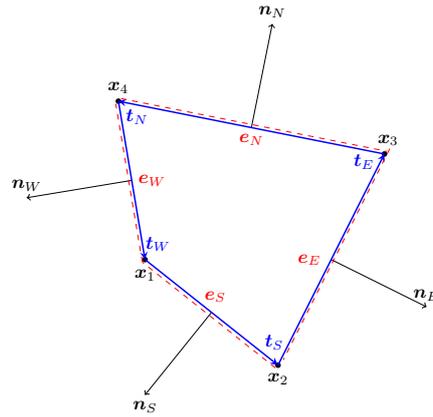


Abbildung 2.6.: Notation einer primalen logischen Rechteckzelle $\Omega_{i,j}$

Gitterzellen verwendet. Für die Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ist er gegeben durch

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}_1 + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix},$$

wobei \mathbf{x}_1 den Ortsvektor bezeichnet.

2.3.2. Normalenvektor

Der Normalenvektor \mathbf{n}_i ist orthogonal zur jeweiligen Kante \mathbf{e}_i und ist stets (außer bei der Piola-Transformation) dem Zellinneren entgegengerichtet. Zudem wird nur der normierte Normalenvektor für spätere Rechnungen verwendet. Für zwei Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ gilt

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_0 + \frac{1}{|\mathbf{n}|} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet \mathbf{x}_0 den Ortsvektor. Dieser wird definiert durch den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zwischen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

2.3.3. Der Mittelpunkt

Zur Definition gibt es mehrere Möglichkeiten von denen nur zwei näher betrachtet werden. Zum einen den Mittelpunkt der Eckpunkte eines logischen Rechtecks $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$

$$\mathbf{x}_\mu = \frac{1}{4}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4), \quad (2.7)$$

wobei $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3, 4$, die Eckpunkte eines beliebigen Vierecks bezeichnen. Dieser wird auch baryzentrischen Mittelpunkt genannt. Und zum anderen den Flächenmittelpunkt

$$\mathbf{x}_\nu = \frac{\int_V \mathbf{x} d\tau}{\int_V d\tau}, \quad (2.8)$$

auch als Schwerpunkt bekannt. V bezeichnet hier ein beliebiges Viereck. Einfache Testsimulationen haben gezeigt, dass zumindest bei einer der später vorgestellten Methoden, fast die selben Ergebnisse erzeugt werden. Jedoch ist der Fehler der Annäherung bei Verwendung des Flächenmittelpunkt etwas höher als bei der Verwendung des baryzentrischen Mittelpunktes. Aus diesem Grund beschäftigt sich die Diplomarbeit ab hier nur noch mit dem baryzentrischen Mittelpunkt. Abbildung [2.7] zeigt diese beiden Punkte. Auch die Mittelpunkte der Kanten werden mittels der Linearkombination der zwei der Kante betreffenden Punkte berechnet.

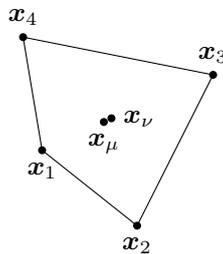


Abbildung 2.7.: baryzentrischer Mittelpunkt \mathbf{x}_μ und Flächenmittelpunkt \mathbf{x}_ν eines beliebigen Vierecks

2.3.4. Flächeninhalt

Betrachtet wird nun der Flächeninhalt zweier geometrischer Figuren. Zum einen der des unregelmäßigen Vierecks und zum anderen der des Dreiecks. In diesem Abschnitt werden die angesprochenen Punkte \mathbf{x} um eine Koordinate $z = 0$ erweitert, damit das Kreuzprodukt angewendet werden kann. Die Fläche eines Dreiecks mit den Eckpunkten $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ ist gegeben durch

$$|V_T| = \frac{1}{2} |[\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1] \times [\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1]|.$$

Das Viereck mit den Eckpunkten $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ wird in zwei Dreiecke $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4$ und $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ zerlegt. Der Flächeninhalt ergibt sich dann zu

$$|V_S| = \frac{1}{2} (|[\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1] \times [\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1]| + |[\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3] \times [\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3]|).$$

Weiter wird der Flächeninhalt von dualen Gitterzellen benötigt. Die duale Gitterzelle wird dazu in 8 Dreiecke zerlegt und deren Flächeninhalt aufsummiert. Der Mittelpunkt

einer dualen Zelle kann zwar nicht berechnet werden, jedoch ist er durch den einzigen Schnittpunkt der vier primalen Zellen genau definiert.

3. Diskrete Vektorfelder und Integralsätze

3.1. Diskrete Repräsentation von Vektorfeldern auf logischen Rechteckgittern

Die Diplomarbeit bezieht sich auf die Diskretisierung des Spannungstensors der Navier-Stokes-Gleichungen, welcher nur von einem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$ abhängig ist. Ein Geschwindigkeitsfeld ist formal ein Vektorfeld. Dieses ordnet jedem Punkt in der Ebene einen Geschwindigkeitsvektor zu, welcher eine Aussage über den Betrag der Geschwindigkeit und deren Richtung zulässt. Grafisch kann man es durch eine endliche Anzahl an Vektoren darstellen, siehe Abbildung [3.1]. Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten um ein gegebenes stetiges Vektorfeld zu diskretisieren.

Eine Möglichkeit wäre, die Vektoren in den Zellmittelpunkten explizit zu berechnen und zu einer Menge zusammenzufassen. Diese Art der Repräsentation, bzw. der diskreten Zerlegung, wird auch *Arakawa-A Gitter* [[9]] genannt, siehe Abbildung [3.2.1]. Dies hat den Vorteil, dass beide Vektorkomponenten in dem selben Punkt bekannt sind und somit grafisch dargestellt werden können. Jedoch ist die Lage der Geschwindigkeitskomponenten für die späteren Verfahren ungünstig. Eine andere Möglichkeit ist die Repräsentation

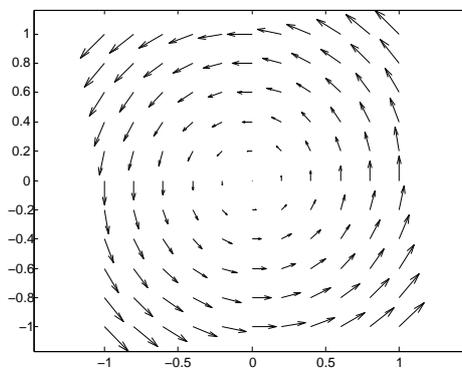


Abbildung 3.1.: Beispiel für die Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v} = (-y, x)^T$

durch ein so genanntes versetztes *Arakawa-C Gitter* [[9]], siehe Abbildung 3.2.2. Dabei wird der konkrete Vektor in den sämtlichen Kantenmittelpunkten berechnet und mit der Normalen dieser Kante skalar Multipliziert. Der daraus resultierende Wert gibt nun die Geschwindigkeit in die jeweilige Richtung der Normalen an. Die Werte der vertikalen Kanten $\mathbf{e}_{i-\frac{1}{2},j}$ werden mit $\hat{u}_{i-\frac{1}{2},j}$ bezeichnet, und die Werte der horizontalen Kanten $\mathbf{e}_{i,j-\frac{1}{2}}$ mit $\hat{v}_{i,j-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}\hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} &= \mathbf{n}_{i-\frac{1}{2},j} \cdot (u(x_{i-\frac{1}{2},j}, y_{i-\frac{1}{2},j}), v(x_{i-\frac{1}{2},j}, y_{i-\frac{1}{2},j}))^T, \\ \hat{v}_{i,j-\frac{1}{2}} &= \mathbf{n}_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot (u(x_{i,j-\frac{1}{2}}, y_{i,j-\frac{1}{2}}), v(x_{i,j-\frac{1}{2}}, y_{i,j-\frac{1}{2}}))^T.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Alle Punkte des Gitters werden dann zu zwei Mengen Zusammengefasst

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \left\{ \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} : i = \{1, 2, \dots, n_x + 1\}, j = \{1, 2, \dots, n_y + 1\} \right\}, \\ \hat{v} &= \left\{ \hat{v}_{i,j-\frac{1}{2}} : i = \{1, 2, \dots, n_x + 1\}, j = \{1, 2, \dots, n_y + 1\} \right\}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Bildet man zusätzlich noch das Produkt $\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j}$, bzw. $\hat{v}_{i,j+\frac{1}{2}}$, mit der Länge der jeweiligen

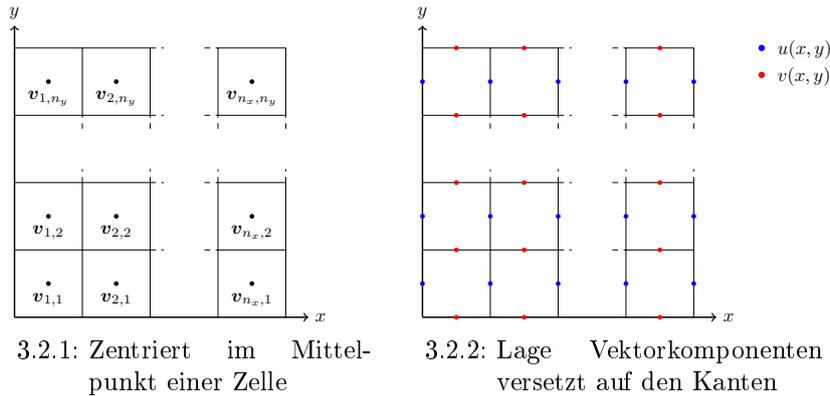
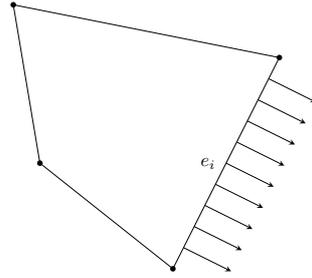


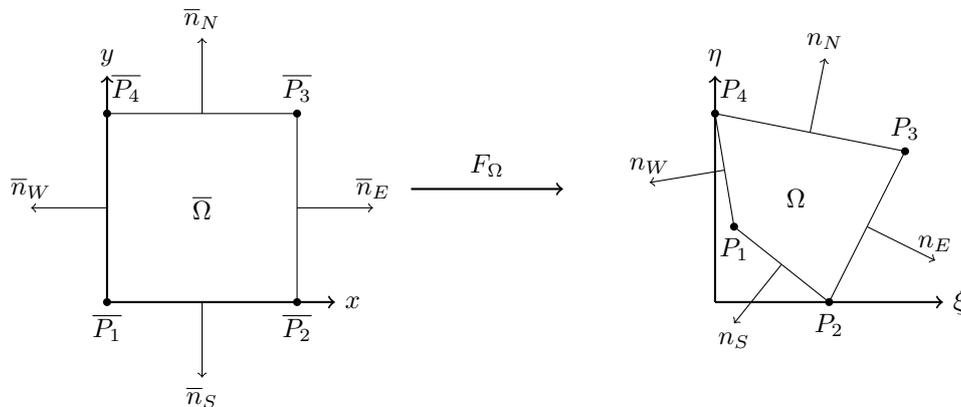
Abbildung 3.2.: Diskretes Vektorfeld auf kartesischem Rechteckgitter

Kante $\left| \mathbf{e}_{i+\frac{1}{2},j} \right|$, bzw. $\left| \mathbf{e}_{i,j+\frac{1}{2}} \right|$, so wird dieser Wert als *Fluss* über die Kante $\mathbf{e}_{i,j+\frac{1}{2}}$, respektive $\mathbf{e}_{i+\frac{1}{2},j}$, bezeichnet, siehe Abbildung [3.3]. Nun ist es allerdings nicht mehr möglich das entstandene Skalarfeld grafisch darzustellen. Zudem sind auch die Geschwindigkeiten im inneren der Zelle unbekannt. Deshalb wird nun ein Verfahren eingeführt, welches die Rekonstruktion des Vektorfeldes in jedem Punkt der Zelle ermöglicht.

Abbildung 3.3.: konstanter Fluss über Kante e_i mit $i \in \{E, N, W, S\}$

3.2. Piola Transformation

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, welches aus den 4 diskreten Geschwindigkeitskomponenten einer Zelle den Geschwindigkeitsvektor an einem beliebigen Punkt innerhalb dieser Zelle annähert. Dieses Verfahren nennt man Vektorrekonstruktion. Die Piola Transformation ist eine lineare Vektortransformation $F_\Omega : \bar{\Omega} \rightarrow \Omega$, welche es erlaubt, ein Geschwindigkeitsfeld einer unverzerrten Zelle (des so genannten Referenzelementes) zu berechnen und auf ein beliebig gestörtes Element zu übertragen. Im folgenden Abschnitt werden alle Größen und Vektoren, welche sich auf das Referenzelement beziehen mit „ $\bar{\cdot}$ “ gekennzeichnet, siehe Abbildung [3.4] Als Referenzelement wählt

Abbildung 3.4.: Bekanntes Referenzelement $\bar{\Omega}_{i,j}$ und beliebiges logisches Rechteck $\Omega_{i,j}$

man das Einheitsquadrat mit den Eckpunkten

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0), \bar{\mathbf{x}}_2 = (1, 0), \bar{\mathbf{x}}_3 = (1, 1), \bar{\mathbf{x}}_4 = (0, 1)$$

und den, auf den Kanten senkrecht stehenden, Normalenvektoren

$$\bar{\mathbf{n}}_E = (1, 0)^T, \bar{\mathbf{n}}_N = (0, 1)^T, \bar{\mathbf{n}}_W = (-1, 0)^T, \bar{\mathbf{n}}_S = (0, -1)^T.$$

Das gestörte logische Rechteck ist gegeben durch die Eckpunkte

$$\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2), \mathbf{x}_3 = (x_3, y_3), \mathbf{x}_4 = (x_4, y_4),$$

und den Kantenlängen

$$\mathbf{e}_E = |\mathbf{e}_E|, \mathbf{e}_N = |\mathbf{e}_N|, \mathbf{e}_W = |\mathbf{e}_W|, \mathbf{e}_S = |\mathbf{e}_S|.$$

Weiter werden die Normalenvektoren des gestörten Rechtecks mit \mathbf{n}_l , $l = E, N, W, S$ bezeichnet. Die Piola Transformation ist nun gegeben durch

$$F_{\Omega_i,j}(\xi, \eta) = \mathbf{x}_1(1 - \xi)(1 - \eta) + \mathbf{x}_2(1 - \xi)\eta + \mathbf{x}_3\xi\eta + \mathbf{x}_4\xi(1 - \eta), \quad (3.3)$$

zudem bezeichnet DF_{Ω_i} die Jacobimatrix der Abbildung

$$DF_{\Omega_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

und $J_{F_{\Omega_i}} = \left| \det(DF_{\Omega_i}) \right|$ die Determinante der Jacobimatrix

$$J_{\Omega_i} = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right| \quad (3.5)$$

Die Notationen für die inverse Transformation $F_{\Omega_i,j}^{-1}$ lauten dann äquivalent $DF_{\Omega_i}^{-1}$ für die Jacobimatrix und $J_{F_{\Omega_i}^{-1}} = \left| \det(DF_{\Omega_i}^{-1}) \right|$ für die Determinante dieser. Es besteht folgender Zusammenhang

$$DF_{\Omega_i}^{-1}(x, y) = (DF_{\Omega_i})^{-1}(\xi, \eta), \quad J_{F_{\Omega_i}^{-1}}(x, y) = \frac{1}{J_{F_{\Omega_i}}(\xi, \eta)}. \quad (3.6)$$

Die Normalen des logischen Rechtecks berechnen sich dann wie folgt [siehe: Quelle [5]]

$$\mathbf{n}_l = \frac{1}{|\mathbf{e}_l|} J_{\Omega_i} (DF_{\Omega_i,j}^{-1})^T \hat{\mathbf{n}}_l, \quad l \in \{E, N, W, S\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n_{\Omega}\} \quad (3.7)$$

3.3. Integralsätze

3.3.1. Gaußscher Integralsatz (Divergenzsatz)

Die Divergenz eines Geschwindigkeitsfeldes ist ein Skalarfeld. Sie ist ein Maß für das Verhältnis von Zu- und Abfluss in jedem Punkt des Geschwindigkeitsfeldes. Das heißt

die Divergenz mißt, wieviel mehr aus einem Punkt hinaus, als hinein strömt. Allgemein gilt

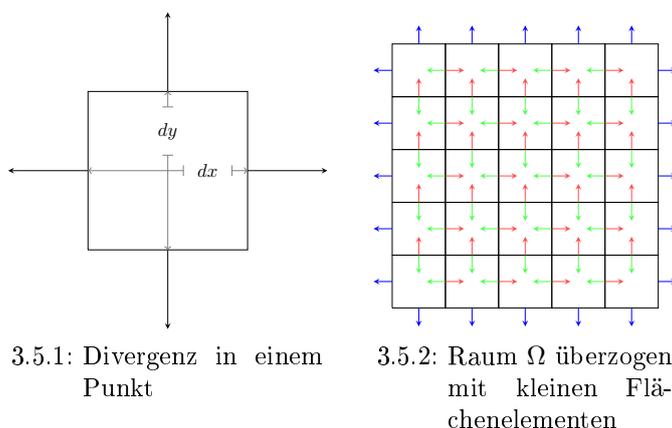
- $\mathbf{div} \mathbf{v}(u(x, y), v(x, y)) > 0$: im Punkt (x, y) ist eine *Quelle*
- $\mathbf{div} \mathbf{v}(u(x, y), v(x, y)) < 0$: im Punkt (x, y) ist eine *Senke*
- $\mathbf{div} \mathbf{v}(u(x, y), v(x, y)) = 0$: Das Geschwindigkeitsfeld ist im Punkt (x, y) *divergenzfrei*

Divergenzfrei wird ein Vektorfeld genannt, wenn es weder Quellen noch Senken besitzt, also in jedem Punkt Null ist.

Der Gauß'sche Integralsatz sagt aus, dass die Divergenz eines beliebigen Volumenelements über den Fluss über dessen Rand berechnet werden kann.

$$\int_V \mathbf{div} \mathbf{v} d\Omega = \oint_{\partial V} \mathbf{n} v ds, \quad (3.8)$$

wobei $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$ das Vektorfeld benennt. Weiter wird mit \mathbf{n} die nach außen gerichtete Normale des Randes ∂V benannt und mit ds das Linienelement bezeichnet. Geometrisch kann man sich die Divergenz in einem Punkt als infinitesimal kleines Flächenelement mit nach aussen gerichteten Vektoren vorstellen, welche den Fluss in die jeweilige Richtung anzeigen, siehe Abbildung x. Wenn man nun ein Gebiet Ω mit diesen kleinen Elementen überdeckt, so sind die Vektoren innerer Kanten entgegengesetzt gerichtet, d.h. dass die Summe (bzw. Integral) über die Vektoren der inneren Kanten den Nullvektor ergeben und nur die Kantenvektoren des Randes von Ω in Normalenrichtung aufsummiert werden, siehe Abbildung x.



3.5.1: Divergenz in einem Punkt

3.5.2: Raum Ω überzogen mit kleinen Flächenelementen

Abbildung 3.5.: Diskretes Vektorfeld auf kartesischem Rechteckgitter

Beweis Anhand des exemplarischen Beispiels eines Quadrats

Betrachtet wird das Quadrat aus Abbildung x1. Die linke Seite des Satzes von Gauss wird nun in zwei einzelne Summanden zerlegt

$$\begin{aligned} I &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v}{\partial y} dy dx. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde beim zweiten Summanden noch die Integrationsreihenfolge vertauscht. Damit lassen sich nun die inneren Integrale berechnen

$$I = \int_{y_1}^{y_2} [u(x_2, y) - u(x_1, y)] dy + \int_{x_1}^{x_2} [v(x, y_2) - v(x, y_1)] dx.$$

Durch erneute Zerlegung erhält man

$$I = \int_{y_1}^{y_2} u(x_2, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} u(x_1, y) dy + \int_{x_1}^{x_2} v(x, y_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} v(x, y_1) dx.$$

Mittels der vier normierten Normalen des Vierecks lässt sich diese Formel noch umschreiben

$$\begin{aligned} I &= \int_{y_1}^{y_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(x_2, y) \\ v(x_2, y) \end{bmatrix} dy + \int_{y_2}^{y_1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(x_1, y) \\ v(x_1, y) \end{bmatrix} (-dy) \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(x, y_2) \\ v(x, y_2) \end{bmatrix} dx + \int_{x_2}^{x_1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(x, y_1) \\ v(x, y_1) \end{bmatrix} (-dx). \end{aligned}$$

Bei den Summanden mit negativem Integranden wurden die Integrationsrichtungen vertauscht um eine mathematisch positive Durchlaufrichtung der geschlossenen Kurve ∂V zu gewährleisten [siehe: Abbildung x2]. Die Integrale beschreiben nun also den Weg der Kurve ∂V . Anmerkung: Im eindimensionalen

3.3.2. Stokesscher Integralsatz (Rotationsatz)

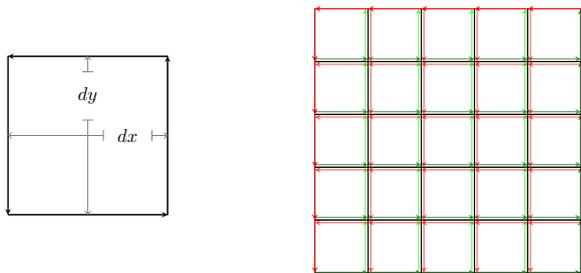
Die Rotation eines Geschwindigkeitsfeldes ist ein Vektor. Seine Komponenten enthalten ein Maß für die Drehbewegung in den Ebenen des Raumes. Der Stokesche Integralsatz

besagt, dass das Flächenintegral über die Rotation einer Ebene, auf der der Normalenvektor \mathbf{n} senkrecht steht, durch ein geschlossenes Linienintegral der Tangentialkomponenten des Randes dieser Ebene berechnet werden kann. Im Gegensatz zum Integralsatz von Gauß spielt die Durchlaufrichtung der Randkurve eine Rolle. Diese wird hier durch die mathematisch positiven Drehrichtung festgelegt, also gegen den Uhrzeigersinn. Der Satz ist gegeben durch

$$\int_V \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{v} d\Omega = \oint_{\partial V} \mathbf{t} v dr, \tag{3.9}$$

wobei mit \mathbf{v} erneut das Geschwindigkeitsfeld, sowie mit V die Fläche und ∂V den Rand derer beschreibt. Bei der geometrischen Betrachtung wird klar, dass bei sich bei der Summe (bzw. Integral) über ein durch kleine Elemente überdecktes Gebiet die inneren Vektoren entgegengesetzt gerichtet sind, siehe Abbildung [3.6.2]. Das heißt, dass diese keinen Beitrag zur Summe liefern und weggelassen werden können. Das geschlossene Integral über die Randkurve wird auch als *Zirkulation* bezeichnet.

Für das Verständniss späterer Rechnungen ist es sinnvoll, die Rotation in der xz -, yz -



3.6.1: Rotation in einem Punkt

3.6.2: Raum Ω überzogen mit kleinen Flächenelementen

Abbildung 3.6.: Diskretes Vektorfeld auf kartesischem Rechteckgitter

und xy -Ebene zu betrachten. Dazu sei $\mathbf{v} = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}))$ ein gegebenes Vektorfeld. Für einen Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ im kartesischen Raum ist ein beliebiges Rechteck gespannt. Der Rand des Rechtecks beschreibt nun das geschlossene Linienintegral $C^{(x,y)}$. Für die weiteren Zwischenschritten wird die Notation (x, y) , welche für die Ebene der Kurve C steht, weggelassen. Das Integral wird nun in vier Teile zerlegt mit $|C_N| = |C_S| = \Delta x$ und $|C_E| = |C_W| = \Delta y$, siehe Abbildung x. Die Rechte Seite der Formel [3.9] wird zunächst auf C_S angewandt

$$\int_{C_S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds = \int_{C_S} u dx \simeq u \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta x. \tag{3.10}$$

Für C_N gilt

$$\int_{C_N} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds = - \int_{C_N} u dx \simeq -u \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta x. \quad (3.11)$$

Das negative Vorzeichen in Formel [3.11] hat seinen Ursprung in der negativen Richtung der Tangente \mathbf{t}_N . Die Summe der beiden Kurvenstücke C_S und C_N ist

$$\begin{aligned} \int_{C_S+C_N} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds &\simeq - \left[u \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - u \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \Delta x \\ &\simeq - \frac{[u(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - u(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)]}{\Delta y} \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Der Faktor $\Delta x \Delta y$ ist der Flächeninhalt der von C umrandeten Zelle, also Δs . Umgestellt erhält man

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{C_S+C_N} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds \simeq - \frac{[u(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - u(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)]}{\Delta y}. \quad (3.13)$$

Äquivalent dazu verläuft auch die Rechnung der beiden anderen Kurvenstücke C_W und C_E . Das ergibt dann

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{C_W+C_E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds \simeq \frac{[u(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - u(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)]}{\Delta x}. \quad (3.14)$$

Formel [3.13] und [3.14] werden nun aufsummiert und der Grenzwert betrachtet, wenn das Volumen ΔS gegen 0 konvergiert. Das heißt, dass $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta y \rightarrow 0$ gehen und somit der Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ angenähert wird. Das führt zu

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{C^{(x,y)}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.15)$$

Diese Prozedur wird nun für die Ebenen xz und yz wiederholt. Für die xz -Ebene gilt dann

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{C^{(x,z)}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (3.16)$$

sowie für die Drehung in der yz -Ebene

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{C^{(y,z)}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (3.17)$$

Beweis Anhand des exemplarischen Beispiels eines Quadrats

Auch dieser Beweis ist ähnlich dem, des Satzes von Gauss 3.3.1. Zunächst wird die linke Seite aus Formel 3.9 explizit aufgeschrieben, dann getrennt und im zweiten Summanden die Integrationsgrenzen vertauscht. Das ergibt

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v}{\partial x} dy dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$

Nun folgt die Berechnung der inneren Integrale, sowie die Zerlegung dieser

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} [u(x, y_2) - u(x, y_1)] dx - \int_{y_1}^{y_2} [v(x_2, y) - v(x_1, y)] dy, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} u(x, y_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, y_1) dx + \int_{y_1}^{y_2} v(x_2, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} v(x_1, y) dy \\ \\ I &= \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(x, y_2) \\ v(x, y_2) \end{bmatrix} dx + \int_{x_2}^{x_1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(x, y_1) \\ v(x, y_1) \end{bmatrix} (-dx) \\ &+ \int_{y_1}^{y_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(x_1, y) \\ v(x_1, y) \end{bmatrix} dy - \int_{y_2}^{y_1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u(x_2, y) \\ v(x_2, y) \end{bmatrix} (-dy). \\ &= \int_{\partial V} v \cdot t ds \end{aligned}$$

Die Rechte Seite aus Formel 3.9 wird auch Zirkulation genannt.

3.3.3. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes ist es möglich, ein Integral abzuschätzen ohne es explizit berechnen zu müssen.

$$\lim_{V \rightarrow \xi} \frac{1}{|V|} \int_V f(x) dx = f(\xi) \quad (3.18)$$

4. Diskretisierung des Spannungstensors

In diesem Teil der Diplomarbeit werden nun die Methoden zur Diskretisierung des koordinatenfreien Spannungstensors vorgestellt.

4.1. Der Spannungstensor

Die Koordinatenfreie Schreibweise des Spannungstensors lautet

$$\mu \left[\mathbf{div} \left(\mathbf{grad}(\mathbf{v}) + (\mathbf{grad}(\mathbf{v}))^T \right) - \frac{2}{3} \mathbf{grad}(\mathbf{div}(\mathbf{v})) \right]. \quad (4.1)$$

Nun kann der Term $\mathbf{div} \left(\mathbf{grad}(\mathbf{v}) + (\mathbf{grad}(\mathbf{v}))^T \right)$ durch $2 \mathbf{grad}(\mathbf{div}(\mathbf{v})) - \mathbf{curl}(\mathbf{rot}(\mathbf{v}))$ ersetzt werden [siehe Quelle [6], Seiten 2, 4]. Der Spannungstensor hat nun die Form

$$\mu \left[\frac{4}{3} \mathbf{grad}(\mathbf{div}(\mathbf{v})) - \mathbf{curl}(\mathbf{rot}(\mathbf{v})) \right]. \quad (4.2)$$

4.2. Diskrete Berechnung

4.2.1. Berechnung der Rotation (rot)

Wie schon in Kapitel [1.2] erwähnt, handelt es sich hier um einen Spezialfall der Rotation im zwei-dimensionalen. Rein formal kann man für Formel [4.2] auch schreiben

$$\mu \left[\frac{4}{3} \mathbf{grad}(\mathbf{div}(\mathbf{v})) - \mathbf{curl}(\mathbf{curl}(\mathbf{v})) \right]. \quad (4.3)$$

Die geometrische Deutung des **Curls** zeigt Abbildung [4.1]. Um den Curl zu berechnen erweitert man das zweidimensionale Gitter um eine fiktive Höhe eins. Das Integral über

die in Abbildung [4.1] rot eingefärbte Kurve verschwindet, da die sich gegenüberliegenden Vektoren entgegengesetzt gerichtet sind und der Wert des Geschwindigkeitsfeldes in $z = 0$ und $z = 1$ identisch sind. Äquivalent dazu verhält sich ein Integral über die grün eingefärbte Kurve.

Nur das Integral über die blau eingefärbte Kurve kann, abhängig vom Geschwindigkeitsfeld, einen Betrag liefern. Rechnerisch wird also nur der Betrag der Rotation gesucht, welche um den auf der x, y -Ebene senkrecht stehenden Vektor verläuft. Also um den Normalenvektor $\mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Eingesetzt in Formel [1.5] ergibt sich daraus Formel [1.6]. Dieser soll nun diskret berechnet werden.

Dazu wird eine duale Gitterzelle betrachtet. Für die Rechnungen benötigt man nun die in Abbildung [4.2] eingezeichneten diskreten Vektorkomponenten, sowie die tangentialen Vektoren des Randes einer dualen Zelle.

Die diskreten Vektorkomponenten auf den Randmittelpunkten der dualen Zellen sind zwar unbekannt, jedoch lassen sie sich mittels der Piola-Transformation berechnen. Die betreffenden primalen Zellen, sowie die Parameter für die Piola-Transformation sind in Tabelle [4.1] eingetragen. Diese seien nun bekannt. Nun soll diese Drehbewegung

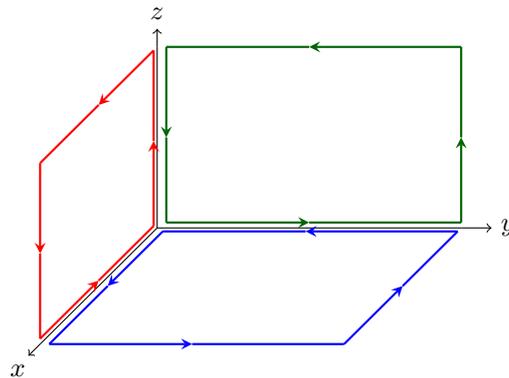


Abbildung 4.1.: Komponenten des Curls

mittels des Satzes von Stokes [3.3.2] berechnet werden. Dazu wird der Mittelwertsatz der Integralrechnung [3.3.3] auf beide Seiten der Gleichung [3.9] angewandt und der Grenzwert betrachtet. Dieser lautet dann für die linke Seite der Gleichung

$$\lim_{V \rightarrow \xi} \frac{1}{|V|} \int_V \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\Omega = \mathbf{rot}(\xi), \quad (4.4)$$

wobei ξ den Mittelpunkt der dualen Gitterzelle bezeichnet. Nach dem Satz von Stokes

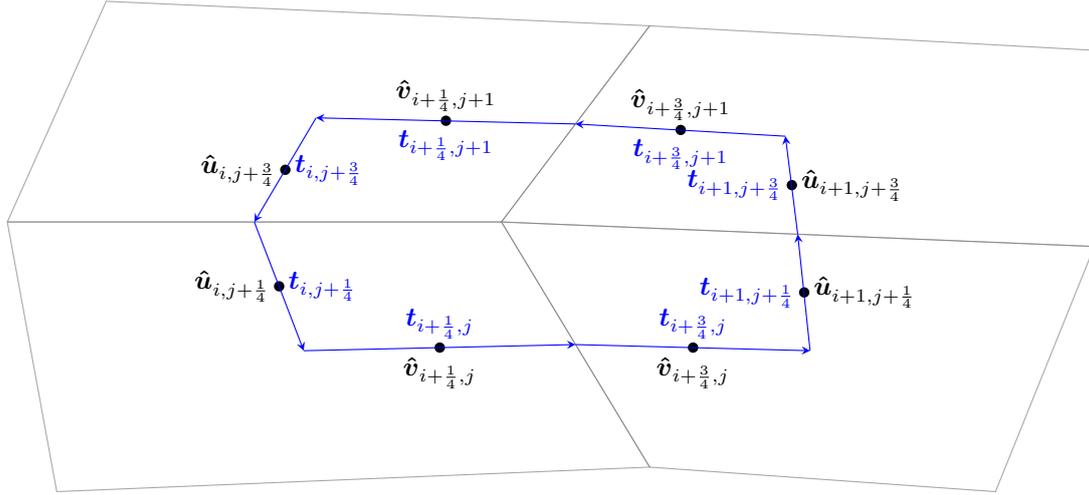


Abbildung 4.2.: Zelle $\hat{\Omega}_{i,j}$ des dualen Gitters mit $i = 1, 2, \dots, n_x, y = 1, 2, \dots, n_y$ mit Tangenten $\mathbf{t}_k^{(i,j)}, k \in \{S, E, N, W\}$ und Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\nu}$ in den Kantenmittelpunkten

hat auch das Randintegral der rechten Seite den selben Grenzwert

$$\mathbf{rot}(\xi) = \lim_{V \rightarrow \xi} \frac{1}{|V|} \oint_{\partial V} \mathbf{t} \mathbf{v} \mathbf{d}r \tag{4.5}$$

Aufgrund der einfachen Topologie der einzelnen Gitterzellen, ist es möglich, das Integral durch eine Summe zu ersetzen. So gilt für eine Gitterzelle $\Omega_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_y$ die diskrete Drehbewegung

$$\mathbf{rot}|_{i\frac{1}{2},j\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^1 \left[t_{i+\frac{1}{4},j+m} v_{i+\frac{1}{4},j+m} + t_{i+m,j+\frac{1}{4}} u_{i+m,j+\frac{1}{4}} + t_{i+\frac{3}{4},j+m} v_{i+\frac{3}{4},j+m} + t_{i+m,j+\frac{3}{4}} u_{i+m,j+\frac{3}{4}} \right] \tag{4.6}$$

Die Drehbewegung ist nach der Berechnung für das gesamte Gitter in den inneren

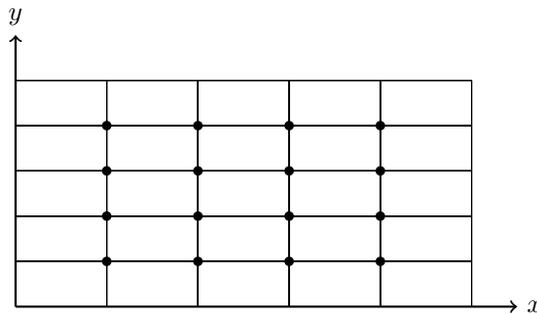
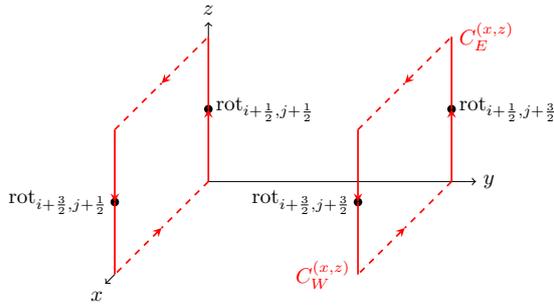


Abbildung 4.3.: Beispiel der Menge \mathbf{rot} eines kartesischen 5x5-Gitters

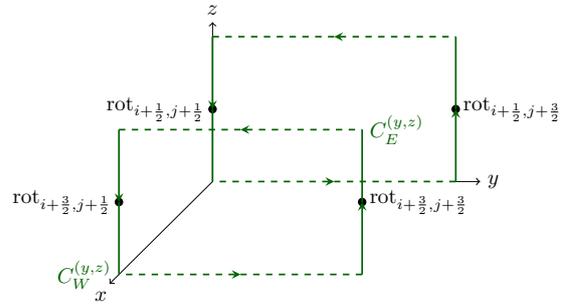
Eckpunkten primaler Zellen bekannt, siehe Abbildung [4.3]. Der Betrag dieser Drehbe-

wegung kann man sich als Potential auf den imaginären Höhenvektoren vorstellen. Im drei-dimensionalen werden diese Potentialwerte nun als Vektorfeld gespeichert

$$\mathbf{rot} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & rot_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{array} \right) : i = 1, 2, \dots, n_x - 2, j = 1, 2, \dots, n_y - 2 \right\}. \quad (4.7)$$



4.4.1: $e_x \mathbf{Curl}(\mathbf{rot})$



4.4.2: $e_y \mathbf{Curl}(\mathbf{rot})$

Abbildung 4.4.: Zweite Anwendung des **Curl** auf Vektorfeld **rot**

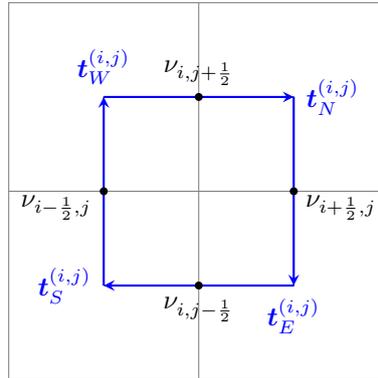


Abbildung 4.5.: Zelle $\hat{\Omega}_{i,j}$ des dualen Gitters mit $i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_y$ mit Tangenten $\mathbf{t}_k^{(i,j)}, k \in \{S, E, N, W\}$ und Geschwindigkeitsvektor ν in den Kantenmittelpunkten

4.2.2. Berechnung der Rotation (Curl) der Drehbewegung (rot)

Die Drehbewegung **rot** ist im vorangegangenen Schritt berechnet worden und steht nun als Vektorfeld zur Verfügung. Nun soll der Curl ein weiteres mal auf dieses Vektorfeld angewendet werden. Nun haben nur die in Abbildung x eingezeichneten Kanten Potentialwerte. Das heißt, dass eine Anwendung des Curls in der xy -Ebene keinen Wert

Tabelle 4.1.: Parameter der Piola-Transformation

primale Zelle	Punkt	ξ	η
$\Omega_{i,j}$	$\hat{u}_{i,j+\frac{1}{4}}$	0.5	0.75
	$\hat{v}_{i+\frac{1}{4},j}$	0.75	0.5
$\Omega_{i+1,j}$	$\hat{u}_{i+1,j+\frac{1}{4}}$	0.5	0.75
	$\hat{v}_{i+\frac{3}{4},j}$	0.25	0.5
$\Omega_{i+1,j+1}$	$\hat{u}_{i+1,j+\frac{3}{4}}$	0.5	0.25
	$\hat{v}_{i+\frac{3}{4},j+1}$	0.25	0.5
$\Omega_{i,j+1}$	$\hat{u}_{i,j+\frac{3}{4}}$	0.5	0.25
	$\hat{v}_{i+\frac{1}{4},j+1}$	0.75	0.5

liefert (da dort sämtliche Potentialwerte 0 sind), sondern nur der Curl in e_x - und e_y -Richtung. Für die Drehung in der xz -Ebene gilt

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int_{C_E^{(x,z)} + C_W^{(x,z)}} v \cdot t ds = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (4.8)$$

sowie für die Drehung in der yz -Ebene

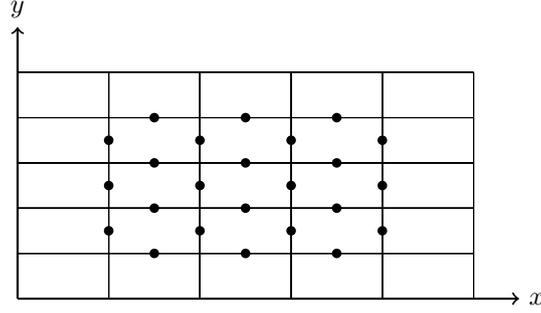
$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int_{C_E^{(y,z)} + C_W^{(y,z)}} v \cdot t ds = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.9)$$

Das bedeutet, dass man nur die Richtungsableitung der **rot**-Werte in den inneren Eckpunkten primärer Zellen berechnen muss. Diese wird durch den Differenzenquotienten approximiert

$$\begin{aligned} \text{Curl}_{i+\frac{1}{2},j+1} &= \frac{\text{rot}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} - \text{rot}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\left| e_{i+\frac{1}{2},j+1} \right|} \\ \text{Curl}_{i+1,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\text{rot}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \text{rot}_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}}{\left| e_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right|} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Abbildung [4.6] zeigt nun die Punkte, in denen der **Curl rot** bekannt ist.

$$\mathbf{div} = \{ \mathbf{div}_{i,j} : i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_y \}. \quad (4.11)$$

Abbildung 4.6.: Beispiel der Menge **rot** eines kartesischen 5x5-Gitters

4.2.3. Berechnung der Divergenz

Die Divergenz wird über einem primalen Gitterelement $\Omega_{i,j}$ berechnet. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf die rechte Seite der Formel [3.8].

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \mathbf{n} \mathbf{v} ds \quad (4.12)$$

Die Formel zur diskreten Berechnung der Divergenz einer primalen Zelle bei bekanntem

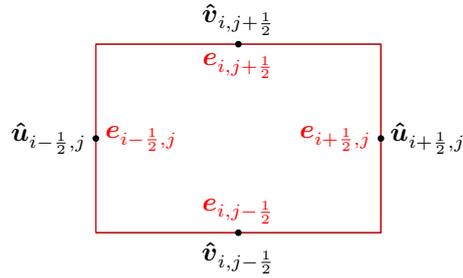


Abbildung 4.7.: Primale Zelle mit globalen indizierten Größen zur Berechnung

diskreten Geschwindigkeitsfeld $\hat{\mathbf{v}}$ einer primalen Zelle lautet

$$\mathbf{div}_{i,j} = \hat{u}_{i-1/2,j} \left| \mathbf{e}_{i-1/2,j} \right| + \hat{u}_{i+1/2,j} \left| \mathbf{e}_{i+1/2,j} \right| + \hat{v}_{i,j-1/2} \left| \mathbf{e}_{i,j-1/2} \right| + \hat{v}_{i,j+1/2} \left| \mathbf{e}_{i,j+1/2} \right|. \quad (4.13)$$

Ganz allgemein gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_{i,j} &= u_{i-1/2,j} \mathbf{n}_{i-1/2,j} \left| \mathbf{e}_{i-1/2,j} \right| + u_{i+1/2,j} \mathbf{n}_{i+1/2,j} \left| \mathbf{e}_{i+1/2,j} \right| \\ &+ v_{i,j-1/2} \mathbf{n}_{i,j-1/2} \left| \mathbf{e}_{i,j-1/2} \right| + v_{i,j+1/2} \mathbf{n}_{i,j+1/2} \left| \mathbf{e}_{i,j+1/2} \right|. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{div} = \{ \mathbf{div}_{i,j} : i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_y \}. \quad (4.15)$$

Die Divergenz ist nun in den Mittelpunkten primärer Zellen bekannt, siehe Abbildung [4.8]

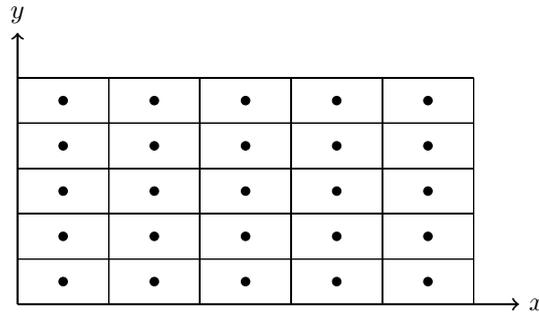


Abbildung 4.8.: Beispiel der Menge **div** eines kartesischen 5x5-Gitters

4.2.4. Berechnung des Gradienten der Divergenz

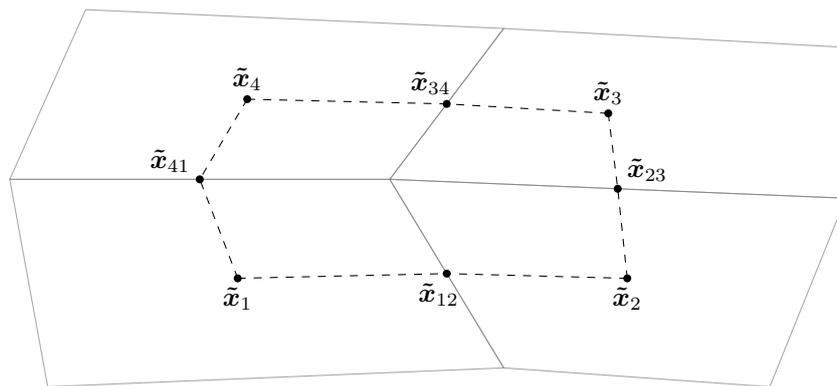


Abbildung 4.9.: Duales Gitterelement mit lokaler Indizierung

Die nun folgenden Berechnungen finden auf einer dualen Gitterzelle $\tilde{\Omega}_{i,j}$ statt, siehe Abbildung [4.9]. Innerhalb dieser Zelle liegen vier Halbzellen. Der Fluss durch diese Halbzellen kann als Gradient dieser Halbzellen aufgefasst werden. Die nun vorgestellte Methode dient zur Bestimmung dieser Flüsse in einer dualen Gitterzelle. Später kann man diese Prozedur für alle $\tilde{\Omega}_{i,j}$ ausführen und die Flüsse durch alle Halbzellen des dualen Gitters $\tilde{\Omega}$ bestimmen. Addiert man die Flüsse angrenzender Halbzellen, so erhält somit den Gradienten der gesamten Kante. Anschliessend wird noch durch die Länge der Kante geteilt, um so den Mittelwert des Gradienten in einem Punkt der Kante zu erhalten.

Die Flüsse werden nun wie folgt bestimmt. Die duale Gitterzelle lässt sich in vier „Teilzellen“ unterteilen. In jeder dieser Zellen ist genau ein Punkt mit dazugehörigem Funktionswert definiert. Nämlich der Ort und der dazugehörige Funktionswert (auch Potential

genannt) der Divergenz. Zudem existieren noch jeweils zwei Punkte, nämlich die angrenzenden Kantenmittelpunkte, jedoch mit unbekanntem Funktionswert.

Man kann diese Potentiale nun als lineare Funktion $\phi^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, für jede der vier Teilzellen darstellen. Die Divergenz bestimmt dabei einen der Koeffizienten für jede Zelle. Das heißt es existieren in der dualen Gitterzelle 8 Freiheitsgrade für die vier Funktionen. Folgende Stetigkeitsbedingungen sollen nun gelten. Die Potentiale der Kantenmittelpunkte $\tilde{\mathbf{x}}_{12}$, $\tilde{\mathbf{x}}_{23}$, $\tilde{\mathbf{x}}_{34}$ und $\tilde{\mathbf{x}}_{41}$ sind stetig, d.h. dass das Potential des selben Randpunktes zweier benachbarte Zellen ist in beiden Zellen gleich. Auch die Flüsse der Zellen seien stetig, d.h. ein Fluss der eine Zelle verlässt bzw. in eine Zelle gelangt ist gleich dem der Nachbarzelle hineinströmenden bzw. verlassenden Fluss.

Diese Bedingungen führen zu 8 Gleichungen, welche die Koeffizientenberechnung und damit verbunden auch die Fluss- bzw. Gradientenberechnung möglich machen.

Betrachtet wird nun eine Teilzelle bestehend aus einem Eckpunkt und zwei Kantenmittelpunkten der dualen Gitterzelle $\tilde{\Omega}_{i,j}$. Diese Punkte ergeben ein Dreieck mit den lokalen Eckpunkten $\tilde{\mathbf{x}}_1$, $\tilde{\mathbf{x}}_2$ und $\tilde{\mathbf{x}}_3$. Die lineare Funktionen zur Potentialberechnung ist darstellbar durch

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i \phi_i(\mathbf{x}), \quad (4.16)$$

wobei \tilde{u}_i den Funktionswert von $\tilde{u}(\mathbf{x})$ in der Ecke i bezeichnet. Mit $\phi_i(\mathbf{x})$ ist die lineare Basis- oder auch Gewichtsfunktion gemeint. Diese ist nur in den Eckpunkten bestimmt und lässt sich durch das „Kronecker-Delta“ darstellen als $\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \quad (4.17)$$

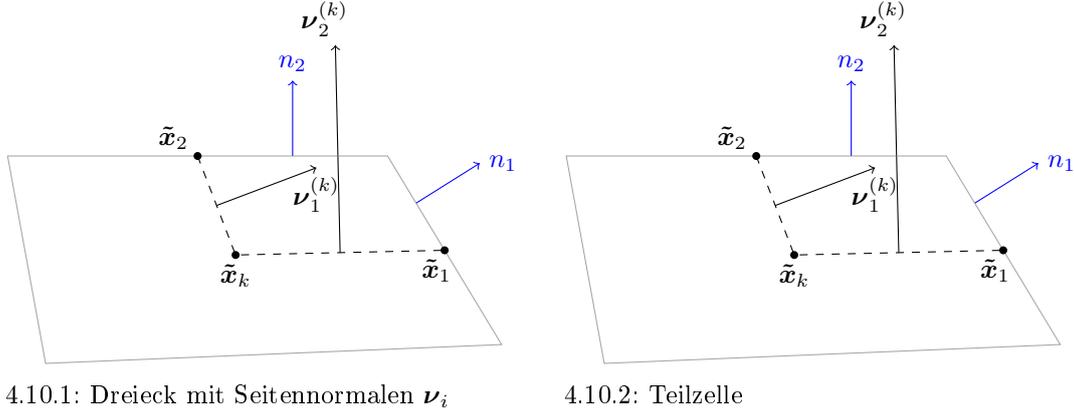
Zur Flussberechnung wird nun der Gradient von $\tilde{u}(\mathbf{x})$ benötigt. Dieser ist nur von der Basisfunktion abhängig. Somit ergibt sich für den Gradienten der Basisfunktion

$$\mathbf{grad} \phi_i = -\frac{1}{2|F_T|} \tilde{\boldsymbol{\nu}}_i, \quad (4.18)$$

wenn $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_i$ die Seitennormale beschreibt, welche der Ecke i gegenüberliegt und deren Länge gleich der Länge der Seite ist auf der sie senkrecht steht, siehe Abbildung [4.10.1]. Mit $|F_T|$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks gemeint.

Für Normalen eines Dreiecks mit der oben genannten Längeneigenschaft, gilt allgemein die Beziehung

$$\sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

4.10.1: Dreieck mit Seitennormalen ν_i

4.10.2: Teilzelle

Abbildung 4.10.

Das heißt, dass durch Umstellung eine Normale durch die beiden anderen ausgedrückt werden kann. So ergibt sich für den Gradienten der Potentialfunktion im Dreieck

$$\mathbf{grad} u = -\frac{1}{2|F_T|} \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i \nu_i = -\frac{1}{2|F_T|} [(u_2 - u_1) \nu_2 + (u_3 - u_1) \nu_3] \quad (4.20)$$

Betrachtet wird jetzt wieder eine Teilzelle mit dem Index k , siehe Abbildung [4.10.2]. Der Mittelpunkt ist mit \tilde{x}_k bezeichnet und die angrenzenden Kantenmittelpunkte erhalten die lokalen Indizes $\tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2$. Die Seitennormalen der Verbindungsstrecken zwischen dem Eckpunkt der dualen Gitterzelle und den Kantenmittelpunkten werden mit $\nu_1^{(k)}$ für die vertikalen -, und mit $\nu_2^{(k)}$ für die horizontalen Kanten bezeichnet. Äquivalent dazu werden auch die Normalen \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 benannt, jedoch stehen diese senkrecht auf den beiden äußeren Kanten der Teilzelle bzw. auf den Halbseiten der dualen Gitterzelle. Obwohl die Seitennormalen $\nu_i^{(k)}$ bei der globalen Betrachtung in jeder Teilzelle in eine andere Richtung zeigen, ist es durchaus sinnvoll, die Richtung der zunehmenden Zellindizes beizubehalten. Deswegen werden für die Zelle die nach aussen gerichteten Seitennormalen aus Abbildung [4.10.1] umgedreht. Daraus ergibt sich aus Formel [4.20] für das Dreieck $\tilde{x}_k, \tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2$

$$\mathbf{grad} \tilde{u}^{(k)} = \frac{1}{2|F_T^{(k)}|} \left[\tilde{\nu}_1^{(k)} (\tilde{u}'_1 - \tilde{u}_k) + \tilde{\nu}_2^{(k)} (\tilde{u}'_2 - \tilde{u}_k) \right]. \quad (4.21)$$

Hier sind $\tilde{u}'_i = \tilde{u}(\tilde{x}'_i), i = 1, 2$, und $\tilde{u}_k = \tilde{u}(\tilde{x}_k)$. Nun wird für jede der vier Halbseiten eine globale Richtung festgelegt. Diese wird \mathbf{n}_i genannt und auch diese zeigen in Richtung wachsender Zellindizes. Aus Kapitel [3.1] ist bekannt, dass das Produkt aus der Geschwindigkeit in Normalenrichtung und der Länge der betreffenden Kante den Fluss über diese Kante ergibt. Ein Fluss der Zelle k durch eine Kante i wird mit $\tilde{f}_i^{(k)}$

bezeichnet. Die Flüsse einer Teilzelle k mit lokaler Indizierung ergeben sich dann wie folgt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} |e_1| \mathbf{n}_1^T \\ |e_2| \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{grad} u^{(k)} \\ &= -\frac{1}{2|F_T^{(k)}|} \begin{bmatrix} |e_1| \mathbf{n}_1^T \\ |e_2| \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1^{(k)} & \boldsymbol{\nu}_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 - u_k \\ \bar{u}_2 - u_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Durch die Einführung der Matrix

$$\mathbf{G}_k = \frac{1}{2|F_T^{(k)}|} \begin{bmatrix} |e_1| \mathbf{n}_1^T \\ |e_2| \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1^{(k)} & \boldsymbol{\nu}_2^{(k)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2|F_T^{(k)}|} \begin{bmatrix} |e_1| \mathbf{n}_1^T \boldsymbol{\nu}_1^{(k)} & |e_1| \mathbf{n}_1^T \boldsymbol{\nu}_2^{(k)} \\ |e_2| \mathbf{n}_2^T \boldsymbol{\nu}_1^{(k)} & |e_2| \mathbf{n}_2^T \boldsymbol{\nu}_2^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

wobei mit $|e_i|$ die Länge der jeweiligen Kante gemeint ist, erhält man die Gleichung 4.22

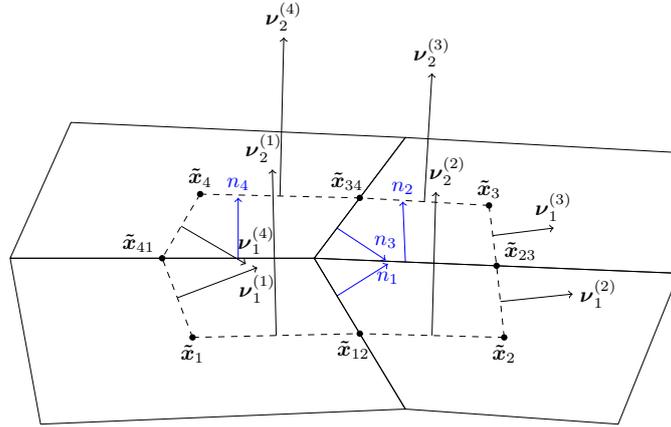


Abbildung 4.11.: Duale Gitterzelle mit globaler Indizierung

in der Kurzform

$$\begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \end{bmatrix} = -\mathbf{G}_k \begin{bmatrix} \bar{u}_1 - u_k \\ \bar{u}_2 - u_k \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Nun wird die gesamte duale Gitterzelle mit globaler Indizierung aus Abbildung [4.11] betrachtet. Die einzelnen Flussgleichungen lauten nun

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_4^{(1)} \end{bmatrix} &= -\mathbf{G}_1 \begin{bmatrix} \bar{u}_1 - u_1 \\ \bar{u}_4 - u_1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} &= -\mathbf{G}_2 \begin{bmatrix} u_2 - \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 - u_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} f_3^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{bmatrix} &= -\mathbf{G}_3 \begin{bmatrix} u_3 - \bar{u}_3 \\ u_3 - \bar{u}_2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} f_3^{(4)} \\ f_4^{(4)} \end{bmatrix} &= -\mathbf{G}_4 \begin{bmatrix} \bar{u}_3 - u_4 \\ u_4 - \bar{u}_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Wie schon bei der lokalen Indizierung gilt $\tilde{u}'_i = \tilde{u}(\tilde{\mathbf{x}}^i)$, und $\tilde{u}_k = \tilde{u}(\tilde{\mathbf{x}}_k)$, $i, k = 1, 2, 3, 4$.

Würde man die Teilzelle aus Abbildung [??] gedanklich spiegeln, so ist erkennbar, dass die Seitennormalen $\boldsymbol{\nu}_1^{(2)}, \boldsymbol{\nu}_1^{(3)}, \boldsymbol{\nu}_2^{(3)}$ und $\boldsymbol{\nu}_2^{(4)}$ in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Aus diesem Grund sind auch die Vorzeichen der betreffenden Differenzen aus Formel [4.25] vertauscht worden. Weiter sind die Funktionswerte \tilde{u}'_i der Kantenmittelpunkte $\tilde{\boldsymbol{x}}'_i$ benachbarter Zellen gleich benannt. Dies fordert die oben genannte Stetigkeit der Potentialwerte in den Kantenmittelpunkten. Durch die oben genannten Stetigkeitsforderungen der Flüsse ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1^{(1)} = f_1^{(2)}, \\ f_2 &= f_2^{(2)} = f_2^{(3)}, \\ f_3 &= f_3^{(3)} = f_3^{(4)}, \\ f_4 &= f_4^{(4)} = f_4^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Mittels der Ausdrücke aus Formel 4.25 und mit $\mathbf{G}_k = \{g_{i,j}^{(k)}\}$ lauten diese explizit

$$\begin{aligned} f_1 &= -g_{1,1}^{(1)}(\bar{u}_1 - u_1) - g_{1,2}^{(1)}(\bar{u}_4 - u_1) = g_{1,1}^{(2)}(\bar{u}_1 - u_2) - g_{1,2}^{(2)}(\bar{u}_2 - u_2), \\ f_2 &= g_{2,1}^{(2)}(\bar{u}_1 - u_2) - g_{2,2}^{(2)}(\bar{u}_2 - u_2) = g_{2,1}^{(3)}(\bar{u}_3 - u_3) + g_{2,2}^{(3)}(\bar{u}_2 - u_3), \\ f_3 &= g_{1,1}^{(3)}(\bar{u}_3 - u_3) + g_{1,2}^{(3)}(\bar{u}_2 - u_3) = -g_{1,1}^{(4)}(\bar{u}_3 - u_4) + g_{1,2}^{(4)}(\bar{u}_4 - u_4), \\ f_4 &= -g_{2,1}^{(4)}(\bar{u}_3 - u_4) + g_{2,2}^{(4)}(\bar{u}_4 - u_4) = -g_{2,1}^{(1)}(\bar{u}_1 - u_1) - g_{2,2}^{(1)}(\bar{u}_4 - u_1). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Diese Flussgleichungen lassen sich nun in Matrixform überführen und die unbekannt Potentialwerte \tilde{u}'_i werden anschliessend eliminiert. Die Flüsse lassen sich in einem Vektor $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T$ zusammenfassen. Durch die Einführung der Vektoren $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4]^T$, der Potentialwerte der Eckpunkte (also der Divergenz) und $\tilde{\mathbf{v}} = [\tilde{u}'_1, \tilde{u}'_2, \tilde{u}'_3, \tilde{u}'_4]^T$, welcher die unbekannt Potentialwerte der Kantenmittelpunkte enthält, lässt sich Formel [4.27] auch durch

$$\mathbf{f} = C_1 \tilde{\mathbf{v}} + F_1 \tilde{\mathbf{u}} = C_2 \tilde{\mathbf{v}} + F_2 \tilde{\mathbf{u}}, \tag{4.28}$$

ausdrücken. Dabei sind C_1, C_2 und F_1, F_2 die Koeffizientenmatrizen. Durch umstellen nach $\tilde{\mathbf{v}}$ dieser Gleichung erhält man für die Flüsse

$$\mathbf{f} = [C_1(C_1 - C_2)^{-1}(F_2 - F_1) + F_1] \tilde{\mathbf{u}} \tag{4.29}$$

Der diskrete Gradient ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} grad_{i+\frac{1}{2},j} &= 0 \\ grad_{i,j+\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Die Punkte in denen der Gradient der Divergenz bekannt ist sind in Abbildung [4.12] eingezeichnet. Ein Teil der Flüsse der inneren Kanten des Randes ist zwar bekannt, jedoch können die Flüsse zur Vervollständigung nur durch geeignete Randbedingungen berechnet werden. Zudem sind die Potentiale des **Curl rot** nur in den in Abbildung [4.12] eingezeichneten Punkten bekannt. Es ist daher nicht nötig den Gradienten an den Rand-Kantenmittelpunkten zu kennen.

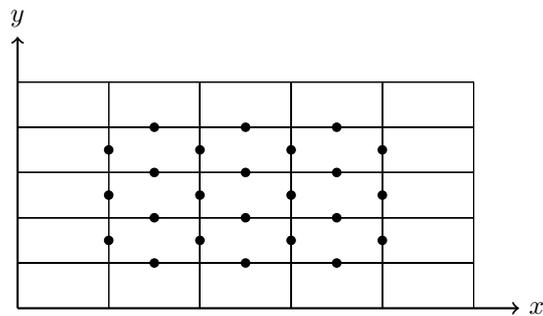


Abbildung 4.12.: Beispiel der Menge **Grad div** eines kartesischen 5x5-Gitters

5. Numerische Beispiele

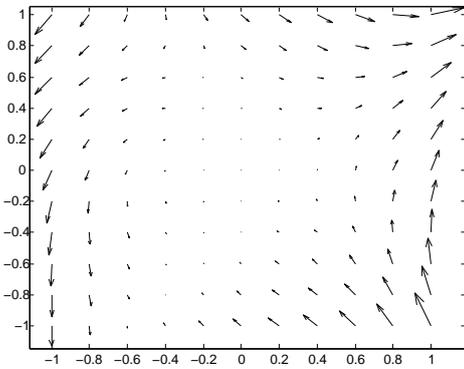
In diesem Teil der Diplomarbeit wird der Tensor für drei verschiedene Geschwindigkeitsfelder diskret berechnet. Dafür werden zunächst die konkreten Funktionswerte in den Kantenmittelpunkten des Gitters abgetragen, die Rechnungen für mehrere Schrittlängen der Gitter durchgeführt, und später der konkrete mit dem errechneten Tensor verglichen.

Hier wäre noch die Bezeichnung des Volumens zu klären. Zunächst wird ein Maß festgelegt, welches einen Vergleich der Tensoren ermöglicht. Hier wird es durch den so genannten *L-Fehler* definiert. Dieser ist gegeben durch

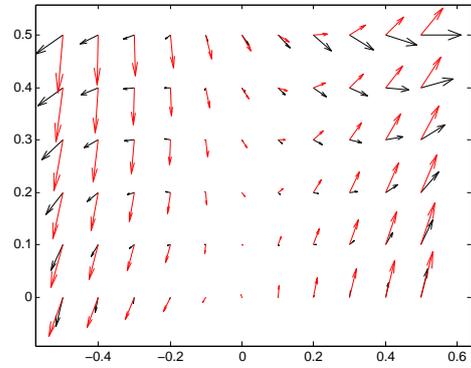
$$L_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_x-2} \sum_{j=1}^{n_y-2} \left| T \left(x_{i+1, j+\frac{3}{2}}, y_{i+\frac{3}{2}, j+1} \right) \right|}{1} \quad (5.1)$$

Die zu untersuchenden Geschwindigkeitsfelder sind

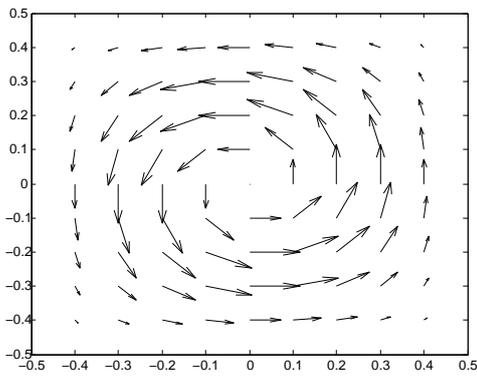
- $\mathbf{v}_1 = (x^3 + 2xy + y^3, -y^3 + 3x^3 - xy)^T$
- $\mathbf{v}_2 = (\sin^2(\pi x) \sin(2\pi y), -\sin^2(\pi y) \sin(2\pi x))^T$
- $\mathbf{v}_3 = (\sin(x^2 + y^2), \cos(xy))^T$



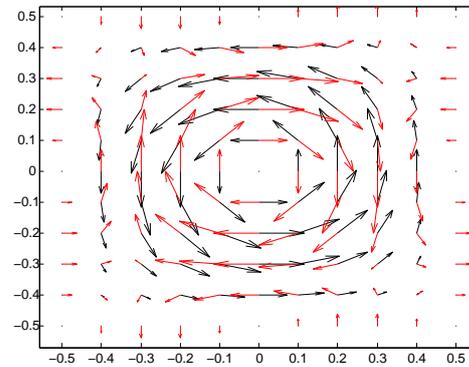
5.1.1: Geschwindigkeitsfeld v_1



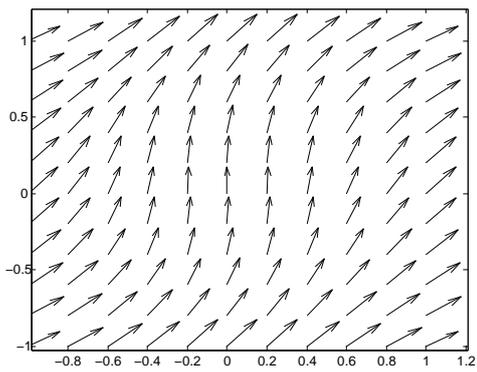
5.1.2: Tensor zum Geschwindigkeitsfeld



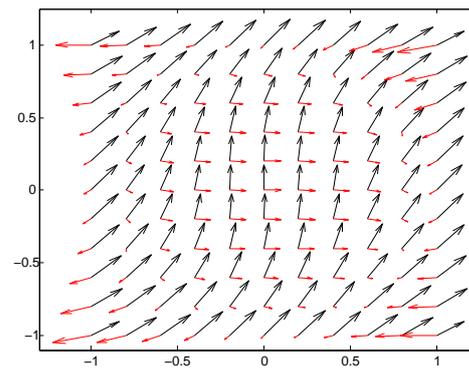
5.1.3: Geschwindigkeitsfeld v_2



5.1.4: Tensor zum Geschwindigkeitsfeld



5.1.5: Geschwindigkeitsfeld v_3



5.1.6: Tensor zum Geschwindigkeitsfeld

Abbildung 5.1.: Vektorfelder

6. Schlussbemerkungen

6.1. Fazit

6.2. Ausblick

Literaturverzeichnis

- [1] <http://pages.unibas.ch/phys-meso/Education/Teaching/Physik1-Ergaenzungen/Phys4.pdf>
- [2] *Mathematik für Ingenieure und Wissenschaftler, Band 3*, Lothar Papula
- ISBN: 978-3-8348-0225-5
- [3] *Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen* ISBN: 978-3-540-89252-6
- [4] *Höhere Mathematik für Ingenieure: Vektoranalysis und Funktionentheorie*
ISBN: 3-519-02958-8
- [5] *IngramWheelerYotov.pdf*
- [6] *KarperMardalWinther.pdf*
- [7] Skript „Mehrpunktflussverfahren“ von Ivar Aavatsmark
<http://folk.uib.no/fciia/mpfa-stuttgart.pdf>
- [8] Skript „Extending Gal-Chen and Somerville terrain-following coordinate transformation on time-dependent curvilinear boundaries“
http://www.ecmwf.int/staff/nils_wedi/publications/paper.jcp.final.pdf
- [9] Möglichkeiten zur Gitterrepresentantation
http://en.wikipedia.org/wiki/Arakawa_grids

Abbildungsverzeichnis

2.1. Beispiele für weitere Gitter-arten	9
2.1.1. Dreiecksgitter	9
2.1.2. Hexagonalgitter	9
2.2. Notationen eines logischen Rechtecks	10
2.2.1. Kanten und Eckpunkte	10
2.2.2. Tangenten und Normalen	10
2.3. Rechen- und physischer Raum der Transformation durch Polarkoordinaten	12
2.3.1. Rechenraum $\bar{\Omega}$ im $\varphi - r$ -System	12
2.3.2. physischer Raum Ω im $x - y$ -System	12
2.4. Rechen- und physischer Raum der Transformation durch bodenfolgende Koordinaten	13
2.4.1. Rechenraum $\bar{\Omega}$ im $\zeta - \eta$ -System	13
2.4.2. physischer Raum Ω im $x - z$ -System	13
2.5. Primales Gitter (grau) und globale Notationen einer dualen Gitterzelle $\tilde{\Omega}_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n_x - 1$, $j = 1, 2, \dots, n_y - 1$	14
2.5.1. Bezeichnungen der Eckpunkte einer dualen Gitterzelle	14
2.5.2. Bezeichnungen der Normalen einer dualen Gitterzelle	14
2.6. Notation einer primalen logischen Rechteckzelle $\Omega_{i,j}$	15
2.7. baryzentrischer Mittelpunkt \mathbf{x}_μ und Flächenmittelpunkt \mathbf{x}_ν eines beliebigen Vierecks	16
3.1. Beispiel für die Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v} = (-y, x)^T$	18
3.2. Diskretes Vektorfeld auf kartesischem Rechteckgitter	19
3.2.1. Zentriert im Mittelpunkt einer Zelle	19
3.2.2. Lage Vektorkomponenten versetzt auf den Kanten	19
3.3. konstanter Fluss über Kante e_i mit $i \in \{E, N, W, S\}$	20
3.4. Bekanntes Referenzelement $\tilde{\Omega}_{i,j}$ und beliebiges logisches Rechteck $\Omega_{i,j}$	20
3.5. Diskretes Vektorfeld auf kartesischem Rechteckgitter	22
3.5.1. Divergenz in einem Punkt	22
3.5.2. Raum Ω überzogen mit kleinen Flächenelementen	22

3.6.	Diskretes Vektorfeld auf kartesischem Rechteckgitter	24
3.6.1.	Rotation in einem Punkt	24
3.6.2.	Raum Ω überzogen mit kleinen Flächenelementen	24
4.1.	Komponenten des Curls	28
4.2.	Zelle $\hat{\Omega}_{i,j}$ des dualen Gitters mit $i = 1, 2, \dots, n_x, y = 1, 2, \dots, n_y$ mit Tangenten $\mathbf{t}_k^{(i,j)}, k \in \{S, E, N, W\}$ und Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\nu}$ in den Kantenmittelpunkten	29
4.3.	Beispiel der Menge rot eines kartesischen 5x5-Gitters	29
4.4.	Zweite Anwendung des Curl auf Vektorfeld rot	30
4.4.1.	$\mathbf{e}_x \mathbf{Curl}(\mathbf{rot})$	30
4.4.2.	$\mathbf{e}_y \mathbf{Curl}(\mathbf{rot})$	30
4.5.	Zelle $\hat{\Omega}_{i,j}$ des dualen Gitters mit $i = 1, 2, \dots, n_x, j = 1, 2, \dots, n_y$ mit Tangenten $\mathbf{t}_k^{(i,j)}, k \in \{S, E, N, W\}$ und Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\nu}$ in den Kantenmittelpunkten	30
4.6.	Beispiel der Menge rot eines kartesischen 5x5-Gitters	32
4.7.	Primale Zelle mit globalen indizierten Größen zur Berechnung	32
4.8.	Beispiel der Menge div eines kartesischen 5x5-Gitters	33
4.9.	Duales Gitterelement mit lokaler Indizierung	33
4.10.	35
4.10.1.	Dreieck mit Seitennormalen $\boldsymbol{\nu}_i$	35
4.10.2.	Teilzelle	35
4.11.	Duale Gitterzelle mit globaler Indizierung	36
4.12.	Beispiel der Menge Grad div eines kartesischen 5x5-Gitters	38
5.1.	Vektorfelder	40
5.1.1.	Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}_1	40
5.1.2.	Tensor zum Geschwindigkeitsfeld	40
5.1.3.	Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}_2	40
5.1.4.	Tensor zum Geschwindigkeitsfeld	40
5.1.5.	Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}_3	40
5.1.6.	Tensor zum Geschwindigkeitsfeld	40

A. Quellcode